

**МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ**

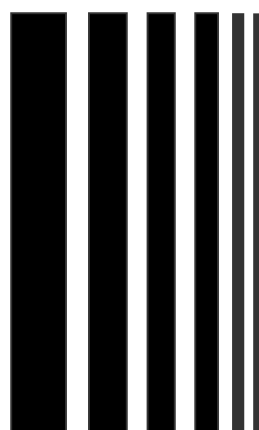
**ТЕРНОПІЛЬСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ ТЕХНІЧНИЙ  
УНІВЕРСИТЕТ  
ІМЕНІ ІВАНА ПУЛЮЯ**

---

---



**ОСНОВИ  
ІНЖЕНЕРНОЇ  
ГРАФІКИ**



**НАВЧАЛЬНИЙ ПОСІБНИК  
ДЛЯ ТЕХНІЧНИХ СПЕЦІ-  
АЛЬНОСТЕЙ**

---

---

**Тернопіль  
2013**

**Балабан С.М., Чиж В.М. Основи інженерної графіки: навчальний посібник. – Тернопіль: Вид-во ТНТУ імені Івана Пулюя. 2012 – 167с.**

**Рецензенти: д.т.н., професор, завідувач кафедри конструювання верстатів, інструментів та машин ТНТУ імені Івана Пулюя Луців І.В; д.т.н., професор, завідувач кафедри машинознавства та комп'ютерної інженерії ТНПУ імені Володимира Гнатюка Федорейко В.С.**

**Відповідальний за випуск: доц. Балабан С.М.**

**Навчальний посібник підготовлено відповідно до програм вивчення курсів «Нарисна геометрія» та «Інженерна графіка», затверджених Міністерством освіти і науки України для студентів механічних, електротехнічних і радіотехнічних спеціальностей.**

**Видання сприяє розвитку у читача логічного та просторового мислення, його геометричного та графічного кругозору. Підручник містить теоретичні положення, приклади розв'язування задач та виконання комплексних графічних завдань. Видання корисне для інженерно-технічних працівників, студентів технічних коледжів і ліцеїв.**

**Розглянуто й затверджено на засіданні методичного семінару кафедри графічного моделювання, протокол № 3 від 23. 10. 2012 р.**

**Схвалено й рекомендовано до друку на засіданні методичної комісії факультету машинобудування та харчових технологій Тернопільського національного технічного університету імені Івана Пулюя, протокол № 4 від 6.12.2012 р.**

**Схвалено й рекомендовано до друку на засіданні методичної ради Тернопільського національного технічного університету імені Івана Пулюя, протокол №4 від 27.12.2012 р.**

## **ВСТУП**

### **1. Предмет “Інженерна графіка”, ціль і задачі курсу**

Інженерна графіка належить до загальнотехнічних дисциплін, які є основними у підготовці спеціалістів з вищою технічною освітою і дає знання, необхідні для вивчення технічних дисциплін. Оволодіння курсом “Інженерна графіка” сприяє розвитку просторового мислення, удосконалює здібності створювати уявлення про форму геометричного об’єкта і готує майбутнього інженера до самостійної проектної роботи.

Предмет курсу “Інженерна графіка” – це викреслювання й читання креслень або графічних моделей геометричних фігур, які лежать в основі технічних виробів і креслень технічних виробів у цілому.

Ціль курсу – дати студентам знання, вміння і навички, необхідні для викладання технічної думки з допомогою креслення.

Задачі курсу:

- побудова креслень технічних виробів та елементів (деталей), з яких вони складаються з реально існуючих зразків або уяви (пряма задача);
- виготовлення елементів (деталей) технічних виробів та виконання робіт зі складання, експлуатації й ремонту технічних виробів з допомогою креслень (обернена задача).

Інженерна графіка складається з нарисної геометрії та креслення. Засоби автоматизації проектних робіт у наш час називають комп’ютерною графікою і часто розглядають як окрему навчальну дисципліну. Нарисну геометрію вважають графікою інженерної графіки, тому графічні методи, закони і правила, які вона вивчає, є теоретичними основами інженерної графіки.

### **2. Позначення на кресленнях геометричних фігур, символів позиційності й логічних операцій**

Під геометричними фігурами або просторовими формами розуміють довільну множину точок. Геометричні фігури поділяють на три групи – точка, лінія, поверхня.

Точка – геометрична фігура яка характеризується положенням у просторі й не має геометричних розмірів. Точки позначають великими буквами латинського алфавіту (*A, B, C, ... X, Y, Z*) або арабськими цифрами (*1, 2, 3, ...*).

Лінія – геометрична фігура, що являє собою геометричну множину точок і характеризується положенням у просторі. Лінії позначають малими буквами латинського алфавіту (*a, b, c, ... x, y, z*).

Поверхня – геометрична фігура, що являє собою геометричну множину ліній і характеризується положенням у просторі. Поверхні позначають великими буквами грецького алфавіту (*A, Γ, Δ, Z, H, Θ, Λ*).

Кути позначають малими буквами грецького алфавіту (*α, β, γ, δ, ε, ζ, η*).

Площини, на які проєкціюють геометричні фігури, називають площинами проєкцій. Площини проєкцій позначають великою грецькою літерою  $\Pi$ . Залежно від розміщення площини проєкцій у просторі для її позначення додатково використовують цифровий індекс:

$\Pi_0$  – площина проєкцій довільно орієнтована у просторі;

$\Pi_1$  – горизонтальна площина проєкцій;

$\Pi_2$  – фронтальна площина проєкцій;

$\Pi_3$  – профільна площина проєкцій.

Для позначення проєкцій геометричних фігур використовують ті ж цифрові індекси, якими позначають відповідні площини проєкцій:

$A_1$  – горизонтальна проєкція точки  $A$ ;

$A_2$  – фронтальна проєкція точки  $A$ ;

$A_3$  – профільна проєкція точки  $A$ .

Площини проєкцій  $\Pi_1$ ,  $\Pi_2$ , і  $\Pi_3$  перпендикулярні між собою і перетинаються по прямих лініях, які називають осями проєкцій. На кресленнях осі проєкцій позначають буквами:

$x$  – вісь абсцис;

$y$  – вісь ординат;

$z$  – вісь аплікату.

Осі проєкцій однієї системи площин проєкцій перетинаються в одній точці, яку називають початком осей проєкцій і позначають буквою  $O$ .

Для визначення положення геометричних фігур, відношення між ними та графічних дій використовують символи позиційності й логічних операцій:

$=$  результат графічної операції;

$\neq$  заперечення;

$\equiv$  збіг, тотожність;

$\parallel$  паралельність;

непаралельність;

$\perp$  перпендикулярність;

$\circ$  мимобіжність;

$\in$  належність (інцидентність);

$\subset$  лежить на ...;

$\supset$  проходить через ...;

$\cap$  перетин;

$\cup$  об'єднання;

$\rightarrow$  відображення, перетворення;

$\Rightarrow$  логічний наслідок;

$\Leftrightarrow$  логічна еквівалентність.

## Розділ 1

### Способи графічних відображень, проєкціювання точки

#### 1.1. Спосіб центрального проєкціювання

Проекція геометричного об'єкта – це відображення його на площині. Площину, на яку проєкціюють геометричні об'єкти, називають площиною проєкцій.

Універсальним способом отримання проєкцій є спосіб центрального проєкціювання. Для побудови центральної проєкції точки  $A$  вибирають у просторі площину проєкцій  $\Pi_0$  і точку  $S$  – центр проєкціювання. Точка  $S$  не належить  $\Pi_0$  ( $S \notin \Pi_0$ ). Під час проєкціювання сполучають центр проєкціювання  $S$  і заданою точкою  $A$  проєкційовальним променем і продовжують його до перетину з площиною проєкцій  $\Pi_0$ . Отриману точку перетину  $A_0$  називають центральною проєкцією точки  $A$ . Процес проєкціювання не залежить від розміщення точок відносно  $\Pi_0$  і  $S$  (рис 1.1). Якщо для деякої точки  $D$  проєкційовальний промінь паралельний до  $\Pi_0$ , то вважають, що проєкція  $D_0$  знаходиться у безмежності.

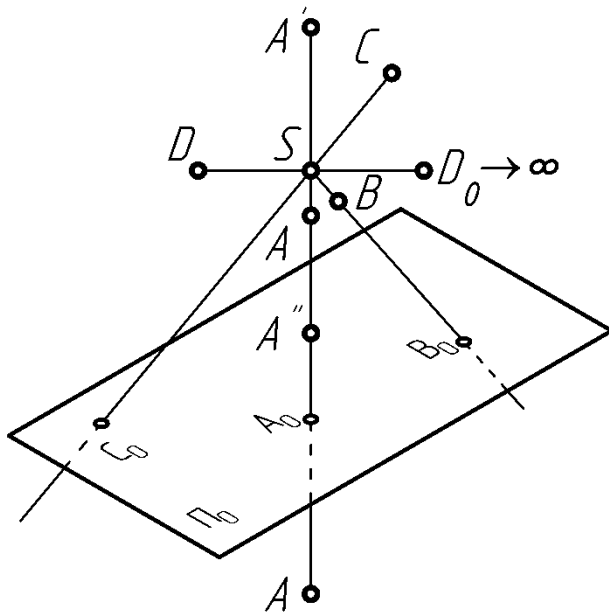


Рис. 1.1

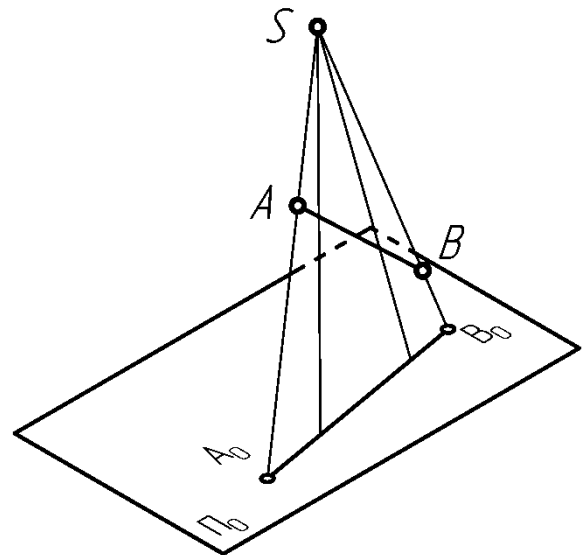


Рис. 1.2

Для побудови проєкції прямої лінії необхідно спроекціювати дві її точки й отримані проєкції сполучити (рис. 1.2). Під час побудови проєкції довільної кривої лінії визначають її характерні точки, проєкціюють їх на  $\Pi_0$  й отримані проєкції сполучають у відповідному порядку (рис. 1.3). Аналогічно будують проєкції плоских фігур і поверхонь (рис. 1.4).

Спосіб центрального проєкціювання складний у використанні, тому на практиці часто використовують спосіб паралельного проєкціювання.

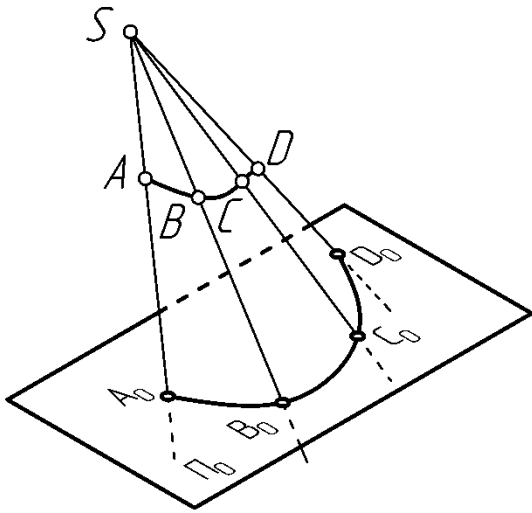


Рис. 1.3

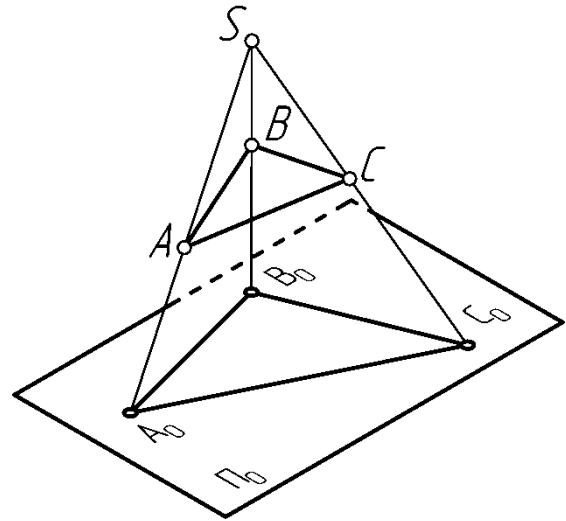


Рис. 1.4

## 1.2. Спосіб паралельного (циліндричного) проєкціювання

Спосіб центрального проєкціювання перетворюють у спосіб паралельного проєкціювання шляхом переміщення центру проєкціювання  $S$  відносно  $\Pi_0$  на безконечно велику відстань. Паралельне проєкціювання є окремим випадком центрального проєкціювання, тому для нього справедливі більшість закономірностей центрального проєкціювання.

Щоб використати спосіб паралельного проєкціювання, достатньо вибрати площину проєкцій  $\Pi_0$  і напрям проєкціювання  $s$ .

Для побудови паралельної проєкції довільної точки  $A$  достатньо провести через неї проєкціювальний промінь, паралельний до напрямку проєкціювання  $s$ , до перетину з  $\Pi_0$ . Закономірності побудови проєкцій точок, які займають різне положення відносно  $\Pi_0$ , а також ліній і поверхонь, аналогічні закономірностям побудови проєкцій відповідних геометричних фігур, які описані у пункті 1.1 (рис. 1.5; 1.6; 1.7 і 1.8).

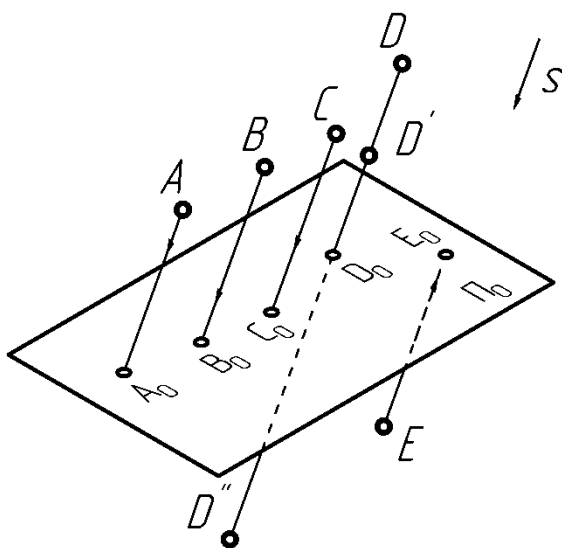


Рис. 1.5

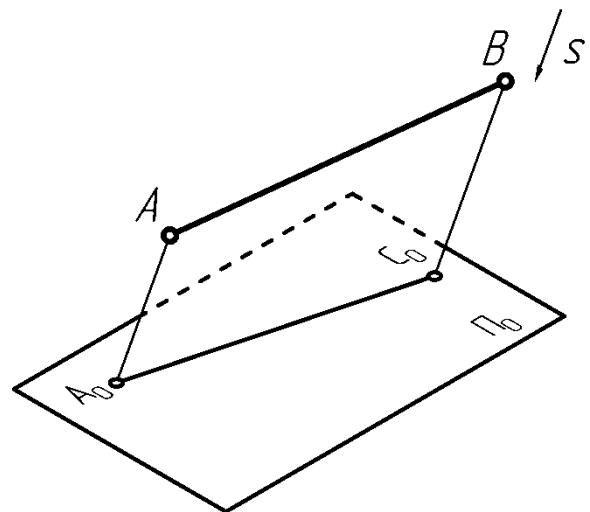


Рис. 1.6

Під час проєкціювання прямих ліній необхідно пам'ятати:

1) якщо точка лежить на лінії, то проєкція точки лежить на проєкції цієї лінії (рис. 1.9);

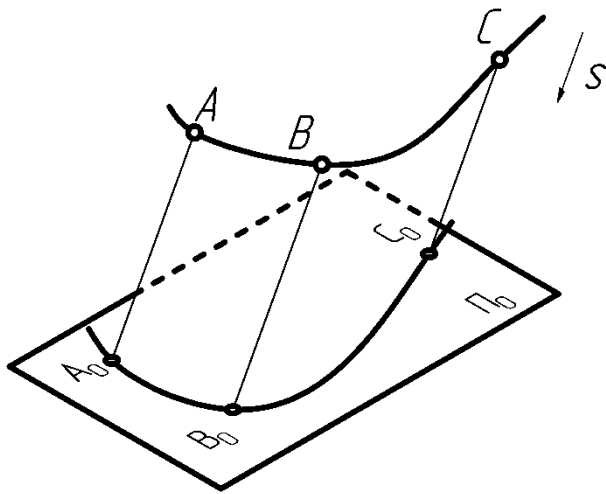


Рис. 1.7

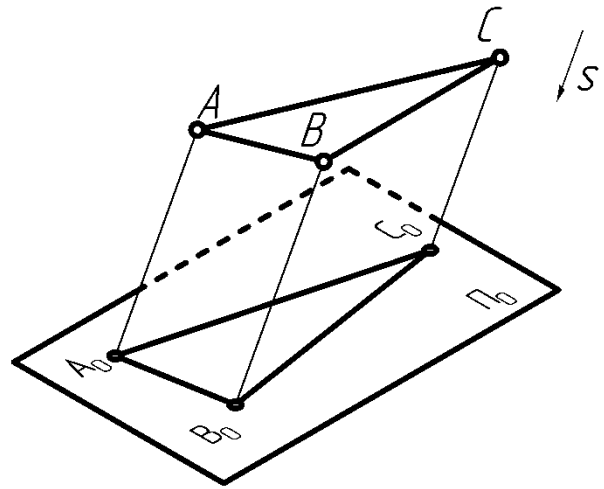


Рис. 1.8

2) якщо пряма паралельна до напрямку проєкціювання, то проєкцією прямої буде точка на площині проєкцій;

3) відрізок прямої лінії, паралельної до площини проєкцій проєкціюється на цю площину в натуральну величину;

4) відношення величин проєкцій відрізків, що лежать на паралельних прямих, або на одній прямій, дорівнюють відношенню величин самих відрізків.

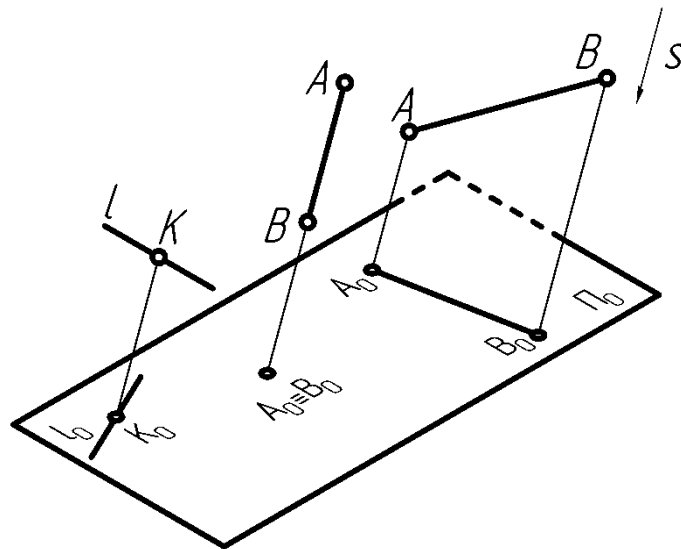


Рис. 1.9

Під час паралельного проєкціювання на величину проєкції геометричної фігури не впливає відстань до площини проєкцій  $\Pi_0$ . Величина проєкції геометричної фігури залежить від напрямку проєкціювання  $s$ .

Паралельне проєкціювання поділяють на косокутне і прямокутне (ортогональне). Проекціювання називають косокутним, якщо проєкціювальні промені падають на площину проєкцій під гострим кутом. Якщо проєкціювальні промені падають на площину проєкцій під кутом  $90^\circ$ , проєкціювання називають прямокутним (ортогональним).

### 1.3. Спосіб прямокутного (ортогонального) проєкціювання

Прямокутне проєкціювання є окремим випадком паралельного проєкціювання, тому для нього справедливі закономірності центрального проєкціювання. Під час прямокутного проєкціювання напрям проєкціювання  $s$  не вказують. Для побудови прямокутної проєкції довільної точки  $A$  достатньо опустити з неї перпендикуляр до перетину з площиною проєкцій  $\Pi_0$  (рис. 1.10).

Спосіб прямокутного проєкціювання дозволяє максимально спростити процес отримання проєкцій геометричних фігур і встановити співвідношення між натуральною їх величиною і величиною проєкцій. Саме його широко використовують у інженерній графіці. Але використання способу проєкціювання на одну площину проєкцій не дозволяє однозначно розв'язувати графічно обернену задачу інженерної графіки (рис. 1.11). Така задача допускає множину рішень, оскільки проєкція  $D_0$  може відповідати кожній з точок, що лежать на проєкціювальному промені ( $D, D', D'', \dots$ ).

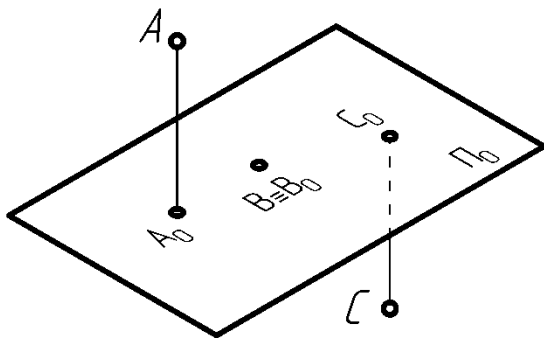


Рис. 1.10

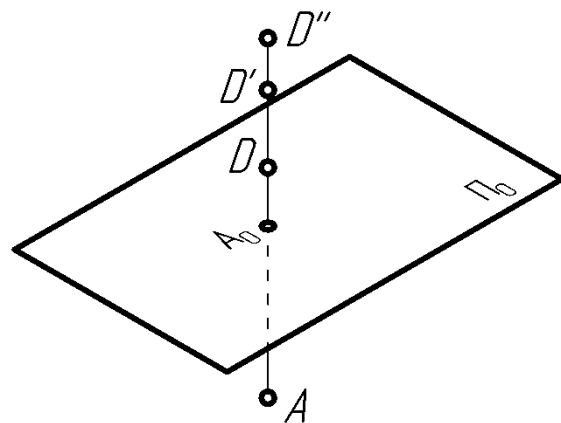


Рис. 1.11

Таким чином, розглянуті способи проєкціювання не дозволяють визначити оригінал за його проєкцією. Для отримання такої можливості в інженерній графіці використовують комплексні креслення на дві або три взаємно перпендикулярні площини проєкцій або аксонометричні зображення.

### 1.4. Спосіб ортогонального проєкціювання на дві взаємно перпендикулярні площини проєкцій

Для виконання такого проєкціювання використовують взаємно перпендикулярні площини проєкцій  $\Pi_1$  і  $\Pi_2$ . Площину  $\Pi_1$  розміщують горизонтально і називають горизонтальною площиною проєкцій. Площину  $\Pi_2$  розміщують вертикально і називають фронтальною площиною проєкцій (рис. 1.12). Дані площини перетинаються по прямій, яку називають віссю проєкцій  $x$  і ділять на чотири півплощини ( $\Pi_1, -\Pi_1, \Pi_2, -\Pi_2$ ). Площини  $\Pi_1$  і  $\Pi_2$  ділять простір на чотири частини, які називають чвертями.



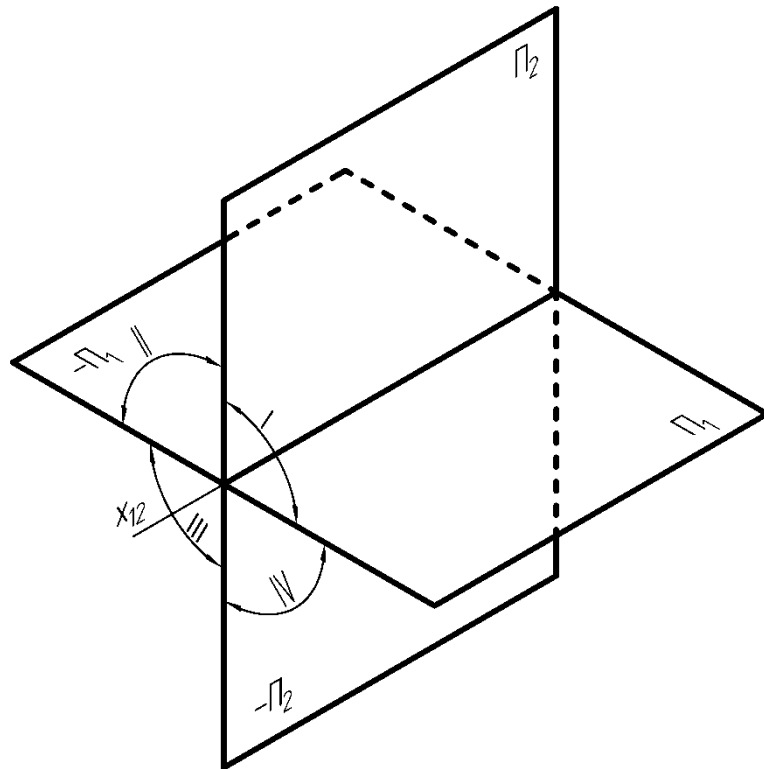


Рис. 1.12

Виконавши ортогональне проєкціювання точки  $A$  на площини проєкцій  $\Pi_1$  і  $\Pi_2$  отримують горизонтальну проєкцію  $A_1$  на площині  $\Pi_1$  і фронтальну проєкцію  $A_2$  на площині  $\Pi_2$  (рис. 1.13). Перпендикулярні між собою проєкціюючі промені  $AA_1$  і  $AA_2$  визначають проєкціюючу площину  $AA_1A_2$ , яка перпендикулярна до  $\Pi_1$ ,  $\Pi_2$  і осі проєкцій  $x$ . У такому випадку  $AA_1 = A_2A_x$  – відстань від точки  $A$  до  $\Pi_1$ ,  $AA_2 = A_1A_x$  – відстань від точки  $A$  до  $\Pi_2$ . Отже, пара точок  $A_1$  і  $A_2$ , які відповідно належать  $\Pi_1$  і  $\Pi_2$  і розміщені на перпендикулярах проведених до осі  $x$  через точку  $A_x$ , визначають положення у просторі єдиної точки  $A$ . Таким чином, якщо відомі проєкції точки  $A_1$  і  $A_2$  на площини проєкцій  $\Pi_1$  і  $\Pi_2$  (рис. 1.14), то провівши перпендикуляри через  $A_1$  до  $\Pi_1$  і через  $A_2$  до  $\Pi_2$ , отримують у пересіченні даних перпендикулярів положення точки  $A$  в просторі. Отже, ортогональне проєкціювання на дві взаємно перпендикулярні площини проєкцій дозволяє розв'язувати графічним способом обернену задачу інженерної графіки.

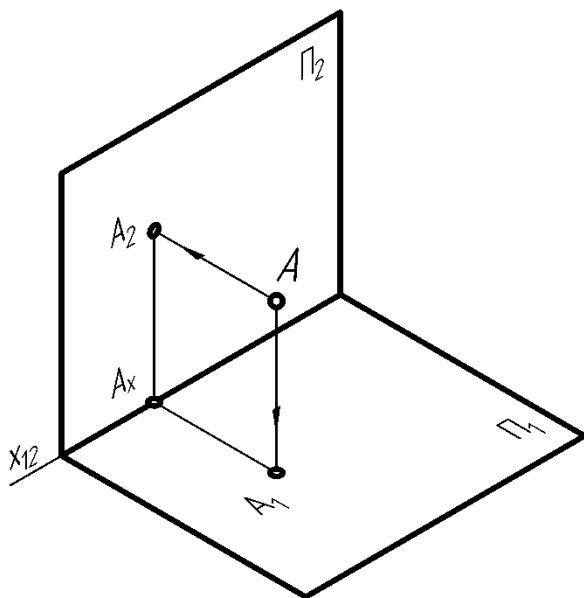


Рис. 1.13

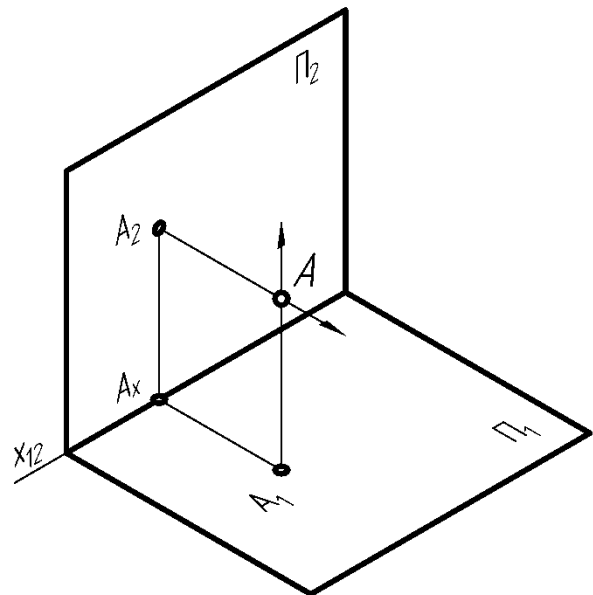


Рис. 1.14

Представлену модель проекційно зображувальної системи називають умовно проективною. Вона дуже незручна для практичного використання оскільки дозволяє відобразити без спотворення лише відстань від точки до однієї з площин проекцій. Тому на її основі утворюють іншу модель, яку називають комплексним кресленням або епюром Монжа.

### 1.5. Епюр Монжа. Проекції точок у різних чвертях простору

Перехід від просторового зображення площин проекцій, що несуть на собі проекції елементів простору, до комплексного креслення здійснюють шляхом суміщення площин проекцій. З цією метою після закінчення

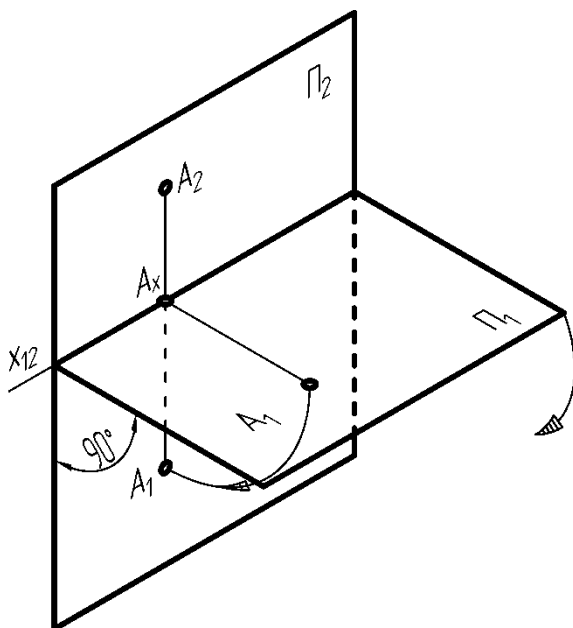


Рис. 1.15

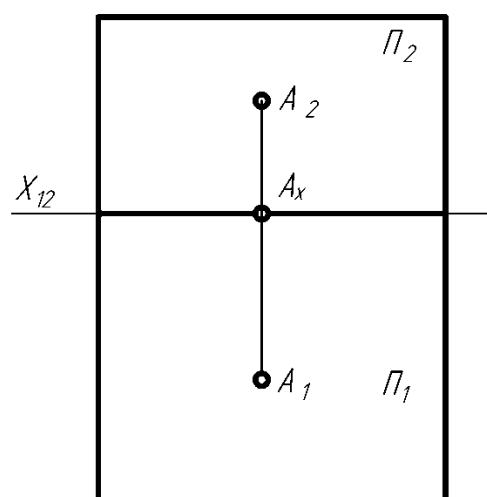


Рис. 1.16

процесу проєкціювання оригінал – точку  $A$ , проєкціюючі промені й проєкціюючу площину умовно вилучають (рис. 1.15) і обертають горизонтальну площину проєкцій  $\Pi_1$  разом з усіма отриманими на ній зображеннями навколо осі проєкцій  $x$  вниз на  $90^\circ$  до суміщення із фронтальною площиною проєкцій  $\Pi_2$  (рис. 1.16).

Оскільки площини проєкцій мають нескінченні розміри, рамочки, які на кресленні їх обмежують і позначення площин проєкцій  $\Pi_1$  і  $\Pi_2$  вилучають. У результаті отримують комплексне креслення точки  $A$  в кінцевому вигляді (рис. 1.17). Пряма, яка сполучає  $A_1$  і  $A_2$ , завжди перпендикулярна до  $x$  її називають вертикальною лінією проєкційного зв'язку.

Використання комплексного креслення забезпечує точність, простоту побудов і зручність вимірювань. Комплексне креслення дозволяє графічно визначити відстань від точки до осі проєкцій  $x$  (рис. 1.18). Вказана відстань дорівнює гіпотенузі прямокутного трикутника, якщо один його катет ( $A_2A_x$ ) дорівнює відстані від точки до однієї площини проєкцій ( $\Pi_1$ ), а другий ( $A_2A_0=A_1A_x$ ) дорівнює відстані від точки до іншої площини проєкцій ( $\Pi_2$ ).

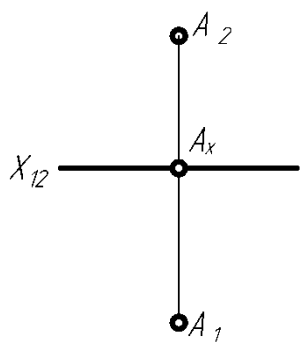


Рис. 1.17

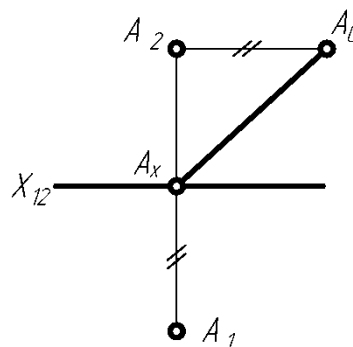


Рис. 1.18

Розташування проєкцій точок відносно осі проєкцій  $x$  залежить від того, в якій чверті знаходиться точка. Точка  $A$  знаходиться у **I** чверті, якщо її горизонтальна проєкція  $A_1$  розташована під віссю  $x$ , а фронтальна проєкція  $A_2$  – над віссю  $x$  (рис. 1.19). Точка  $B$  знаходиться у **II** чверті, якщо горизонтальна  $B_1$  і фронтальна  $B_2$  її проєкції розташовані над віссю  $x$  (рис. 1.20). Точка  $C$  знаходиться у **III** чверті, якщо її горизонтальна проєкція  $C_1$  розташована над віссю  $x$ , а фронтальна проєкція  $C_2$  – під віссю  $x$  (рис. 1.21). Точка  $D$  знаходиться у **IV** чверті, якщо горизонтальна  $D_1$  і фронтальна  $D_2$  її проєкції розташовані під віссю  $x$  (рис. 1.22). Точка  $E$  лежить на площині  $\Pi_1$  ( $E \in \Pi_1$ ), якщо її фронтальна проєкція  $E_2$  лежить на осі  $x$  ( $E_2 \in x$ ) (рис. 1.23).

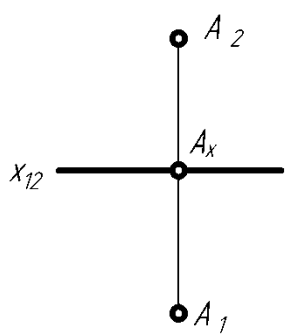
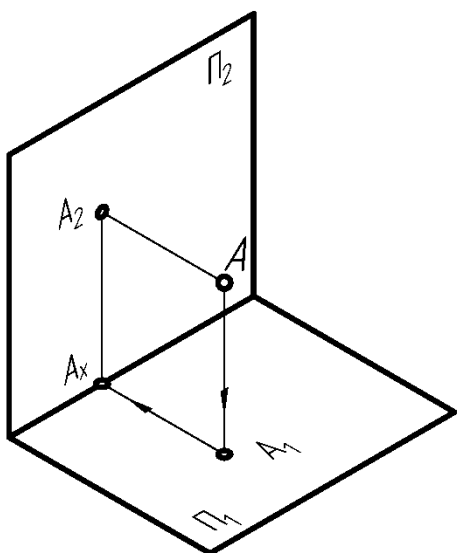


Рис. 1.19

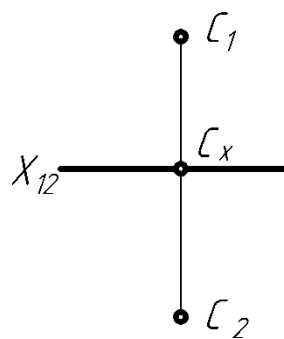
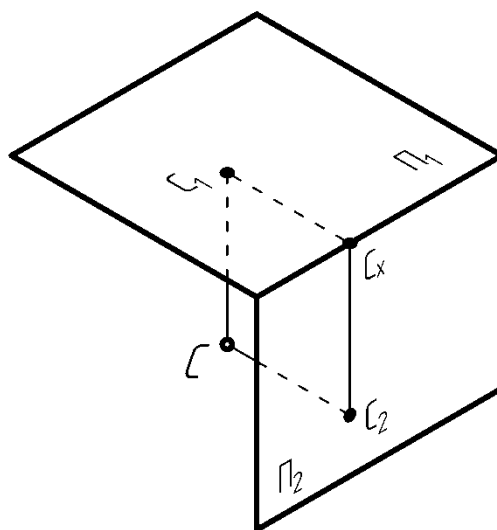


Рис. 1.20

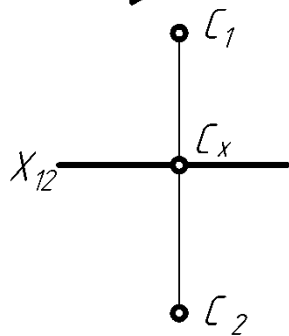
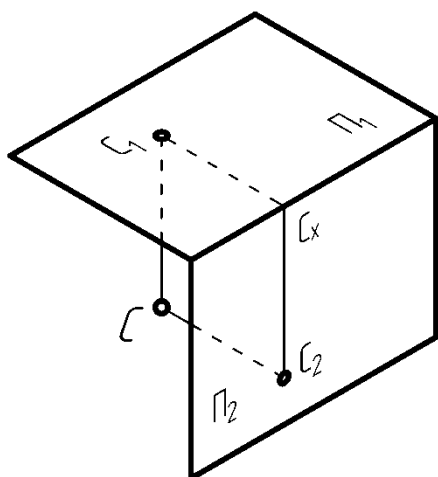


Рис. 1.21

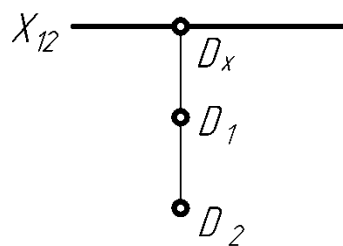
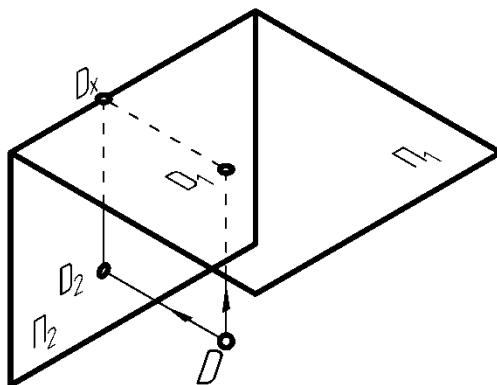


Рис. 1.22

Точка  $F$  лежить на площині  $\Pi_2$  ( $F \in \Pi_2$ ), якщо її горизонтальна проекція  $F_1$  лежить на осі  $x$  ( $F_1 \in x$ ) (рис. 1.24). Точка  $K$  лежить на осі  $x$  ( $K \in x$ ), якщо її горизонтальна  $K_1$  і фронтальна  $K_2$  проекції лежать на осі  $x$  ( $K_1 \equiv K_2 \in x$ ) (рис. 1.25).

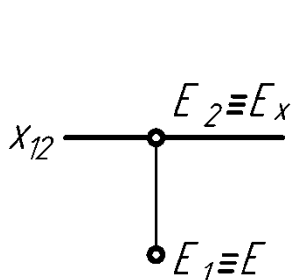


Рис. 1.23

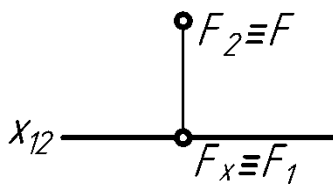


Рис. 1.24

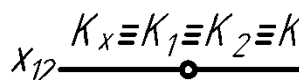


Рис. 1.25

## 1.6. Ортогональне проекціювання на три взаємно перпендикулярні площини проекцій

Проекціювання геометричної фігури на дві взаємно перпендикулярні площини проекцій дає уявлення про її форму й розташування у просторі. Але якщо до складу геометричної фігури входять прямі лінії, фронтальна і горизонтальна проекції яких перпендикулярні до осі проекцій  $x$ , то для отримання графічної інформації про них використовують проекціювання на три взаємно перпендикулярні площини проекцій. Тобто до площин проекцій  $\Pi_1$  і  $\Pi_2$  додають перпендикулярну їм площину  $\Pi_3$ , яку називають профільною площиною проекцій (рис. 1.26).  $\Pi_3$  перетинає  $\Pi_1$  по осі проекцій  $y$ , а  $\Pi_2$  – по осі проекцій  $z$ .

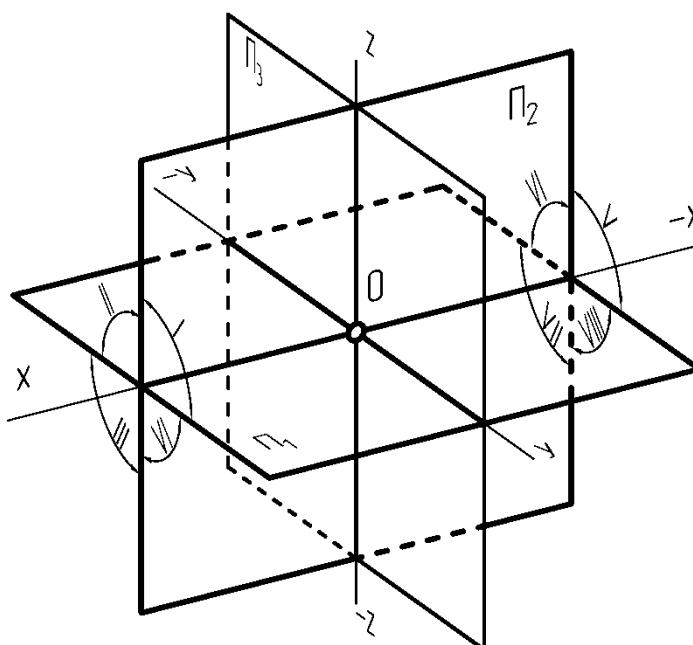


Рис. 1.26

Осі проекцій  $x$ ,  $y$  і  $z$  перетинаються у точці  $O$ , яку називають початком осей проекцій. Площини  $\Pi_1$ ,  $\Pi_2$  і  $\Pi_3$  ділять простір на 8 октантів, нумерують які аналогічно чвертям. Виконавши ортогональне проекціювання точки  $A$

на площини проєкцій  $\Pi_1$ ,  $\Pi_2$  і  $\Pi_3$ , отримують додатково до описаних у пункті 1.4 проєкцій  $A_1$  і  $A_2$  профільну проєкцію  $A_3$  на площині  $\Pi_3$  (рис.1.27).

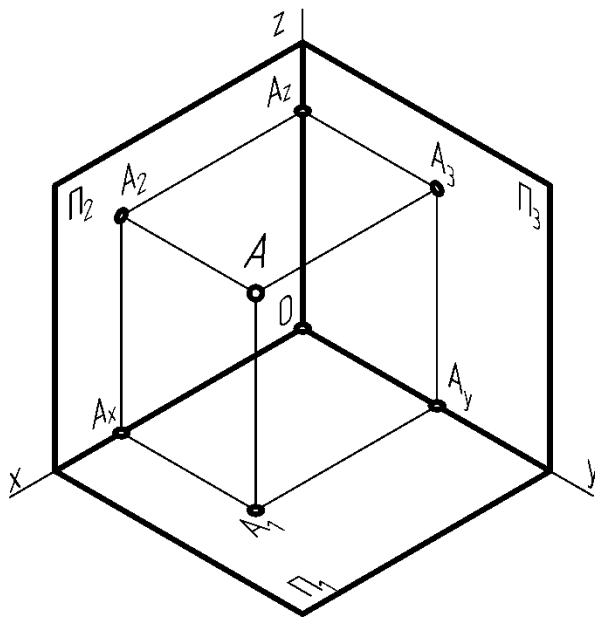


Рис. 1.27

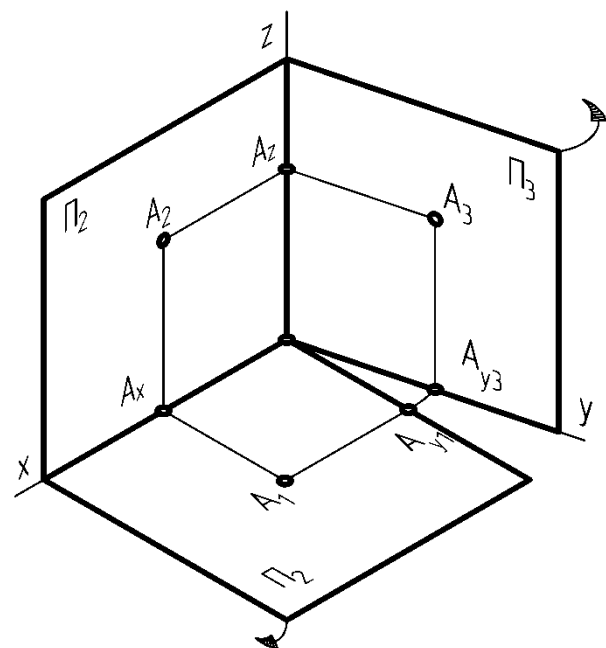


Рис. 1.28

Перехід від просторового зображення до комплексного креслення під час проєкціювання на три взаємно перпендикулярні площини проєкцій проводять аналогічно до описаного в пункті 1.5 переходу до комплексного креслення під час проєкціювання на дві взаємно перпендикулярні площини проєкцій (рис. 1.28). З цією метою вісь проєкцій у умовно “розрізують” уздовж на дві частини, які відносять до  $\Pi_1$  і  $\Pi_3$ .  $\Pi_1$  разом з усіма отриманими на ній зображеннями обертають навколо  $x$  вниз на  $90^\circ$  до суміщення з  $\Pi_2$ , а  $\Pi_3$  разом з усіма отриманими на ній зображеннями обертають навколо  $z$  проти годинникової стрілки на  $90^\circ$  теж до суміщення з  $\Pi_2$ . У результаті отримують комплексне креслення (епюр Монжа) точки на три взаємно перпендикулярні площини проєкцій (рис. 1.29).

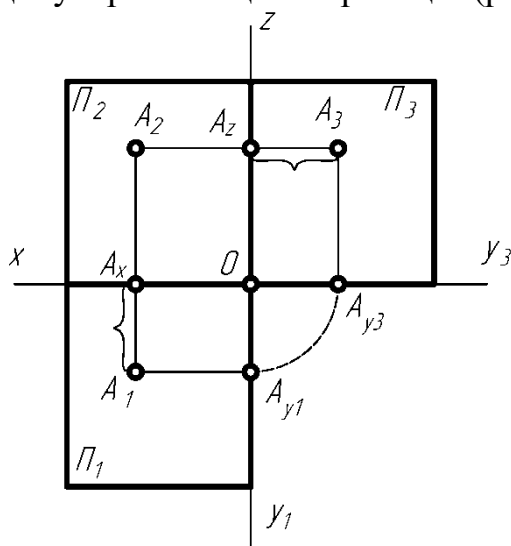


Рис. 1.29

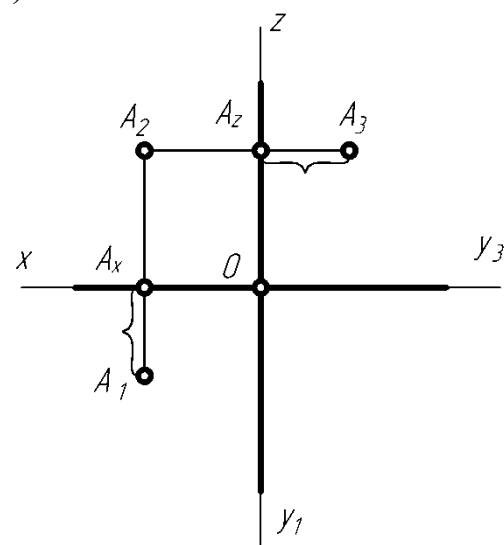


Рис. 1.30

Оскільки площини проєкцій мають нескінченні розміри, рамочки, які їх обмежують, і позначення площин проєкцій  $\Pi_1$ ,  $\Pi_2$  і  $\Pi_3$  вилучають (рис. 1.30). Залишають на комплексному кресленні осі проєкцій, які у подальшому сприймають як еквіваленти певних площин проєкцій.

Під час проєкціювання точки на три взаємно перпендикулярні площини проєкцій необхідно виконувати три закони проєкційного зв'язку:

1) Фронтальна  $A_2$  та горизонтальна  $A_1$  проєкції точки  $A$  завжди знаходяться на прямій лінії, яка перпендикулярна до осі проєкцій  $x$  і називається вертикальною лінією проєкційного зв'язку.

2) Фронтальна  $A_2$  та профільна  $A_3$  проєкції точки  $A$  завжди знаходяться на прямій лінії, яка паралельна до осі проєкцій  $x$  і називається горизонтальною лінією проєкційного зв'язку.

3) Відстань від горизонтальної проєкції  $A_1$  точки  $A$  до осі проєкцій  $x$  дорівнює відстані від профільної проєкції  $A_3$  точки  $A$  до осі проєкцій  $z$  ( $A_1A_x = A_3A_z$ ).

Під час проєкціювання на три взаємно перпендикулярні площини проєкцій враховують, що кожному октанту відповідає своя система знаків на пряму осей проєкцій: додатні значення  $x$  відкладають ліворуч від  $O$ , а від'ємні – праворуч; додатні значення  $y$  відкладають до нас від  $O$ , а від'ємні – від нас; додатні значення  $z$  відкладають вгору від  $O$ , а від'ємні – вниз. Перетворенням просторової системи осей проєкцій  $x, y, z$  отримуємо їх комплексне креслення (рис. 1.31). Систему знаків осей проєкцій в октантах наведено в табл. 1.1.

Таблиця 1.1

Вісь проєкцій	Список в октанті							
	<i>I</i>	<i>II</i>	<i>III</i>	<i>IV</i>	<i>V</i>	<i>VI</i>	<i>VII</i>	<i>VIII</i>
<i>X</i>	+	+	+	+	-	-	-	-
<i>Y</i>	+	-	-	+	+	-	-	+
<i>Z</i>	+	+	-	-	+	+	-	-

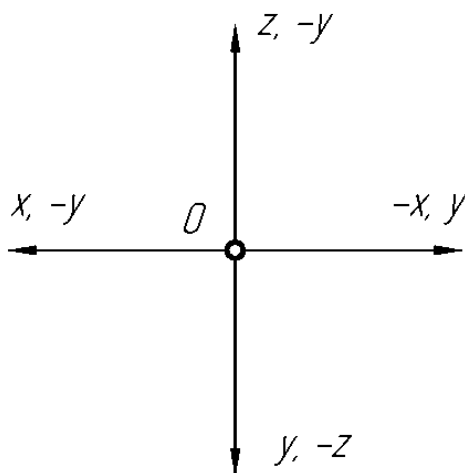


Рис. 1.31

Комплексні креслення точок, розміщених у різних октантах наведено на рис. 1.32.

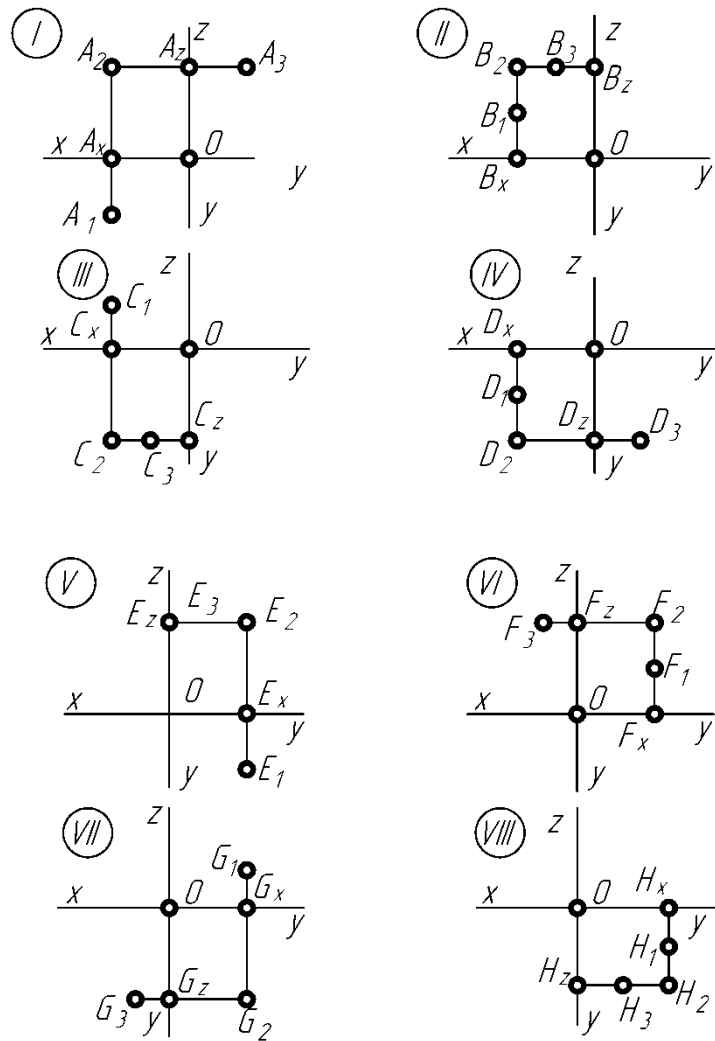


Рис. 1.32

### 1.7. Взаємне положення двох точок. Конкуруючі точки

У просторі точки можуть співпадати або не співпадати. Точки співпадають ( $A \equiv B$ ), якщо їхні однойменні проекції співпадають ( $A_1 \equiv B_1$ ;  $A_2 \equiv B_2$ ;  $A_3 \equiv B_3$ ) (рис. 1.33).

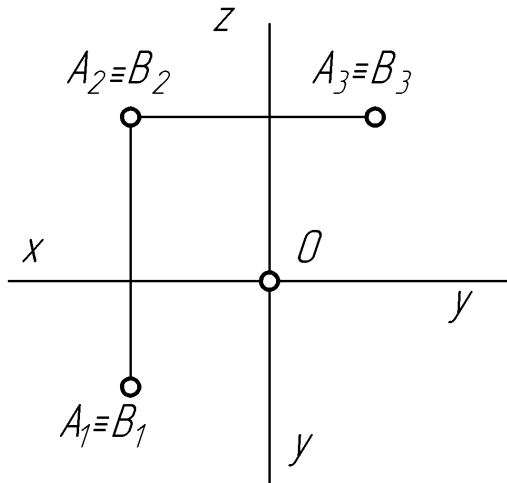


Рис. 1.33

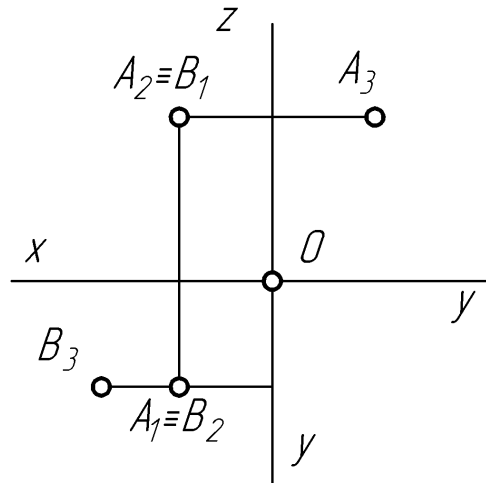


Рис. 1.34



Точки не співпадають ( $C \neq D$ ), якщо їхні однойменні проекції не співпадають ( $C_1 \neq D_1; C_2 \neq D_2; C_3 \neq D_3;$ ) (рис. 1.34).

Особливе місце в інженерній графіці займають точки, проекції яких на одну з площин проекцій збігаються. Такі точки називають конкуруючими. Відстані конкуруючих точок до двох площин проекцій однакові. Для конкуруючих точок одна з двох ліній проекційного зв'язку завжди спільна. Якщо дві точки розміщені на спільній лінії проекційного зв'язку, то одна закриває іншу. Виникає необхідність визначити яка з цих точок видима, а яка невидима. Розрізняють горизонтально-конкуруючі, фронтально-конкуруючі і профільно-конкуруючі точки.

Горизонтально-конкуруючі точки розміщені на однакових відстанях від  $\Pi_2$  і  $\Pi_3$  (рис. 1.35), вертикальна лінія проекційного зв'язку для них спільна, а горизонтальні проекції співпадають ( $K_1 \equiv L_1$ ). Видимість горизонтально-конкуруючих точок визначають за фронтальними їх проекціями. З рис. 1.35 бачимо, що точка  $L$  розміщена над точкою  $K$ , отже вона видима.

Фронтально-конкуруючі точки розміщені на однакових відстанях від  $\Pi_1$  і  $\Pi_3$  (рис. 1.36), вертикальна лінія проекційного зв'язку для них спільна, а фронтальні проекції співпадають ( $M_2 \equiv N_2$ ). Видимість фронтально-конкуруючих точок визначають за горизонтальними їх проекціями. З рис. 1.36 бачимо, що точка  $N$  розміщена перед точкою  $M$ , отже вона видима.

Профільно-конкуруючі точки розміщені на однакових відстанях від  $\Pi_1$  і  $\Pi_2$  (рис. 1.37), горизонтальна лінія проекційного зв'язку для них спільна, а профільні проекції співпадають ( $A_3 \equiv B_3$ ). Видимість профільно-конкуруючих точок визначають за горизонтальними або фронтальними їх проекціями. З рис. 1.37 бачимо, що точка  $A$  більш віддалена від осі  $z$ , отже вона видима.

У позначенні проекцій двох конкуруючих точок, які збігаються, прийнято позначати першою проекцією видимої точки, другою – невидимої.

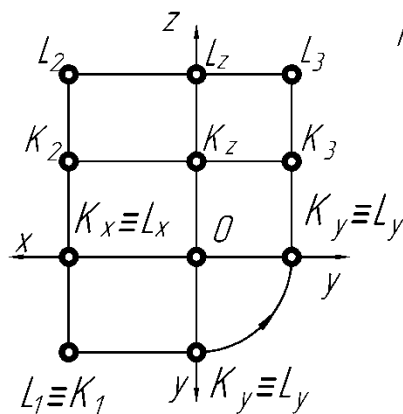


Рис. 1.35

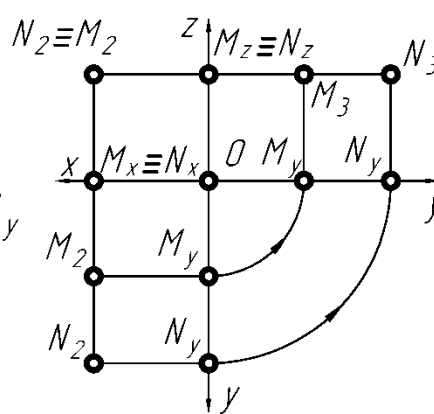


Рис. 1.36

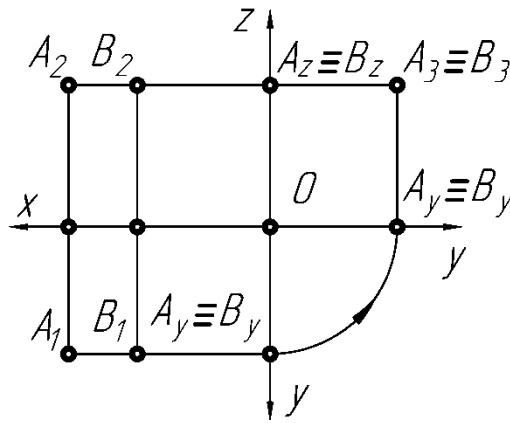


Рис. 1.37

### 1.8. Перехід від осного епюра до безосного і від безосного до осного

Під час виконання креслень користуються безосними епюрами. В безосних епюрах площини проєкцій розміщують на довільних відстанях від об'єкта проєкціювання з таким розрахунком, щоб він завжди знаходився у першій чверті або у першому октанті.

Як сказано вище (пункт 1.4), проєкції точки на дві взаємно перпендикулярні площини проєкцій дозволяють визначити положення точки в просторі (рис. 1.38). Якщо вісь  $x$  перенести паралельно самій собі в положення  $x'$  на відстань  $l$ , то одна з площин проєкцій ( $\Pi_2$ ) наблизиться до точки  $A$  на відстань  $l$ , а інша площина проєкцій ( $\Pi_1$ ) віддаляться від точки  $A$  на таку ж саму відстань. Отже, в результаті паралельного перенесення осі проєкцій  $x$  ортогональні проєкції точки на дві взаємно перпендикулярні площини не змінюють свого положення. Таким чином, на даному комплексному крес-

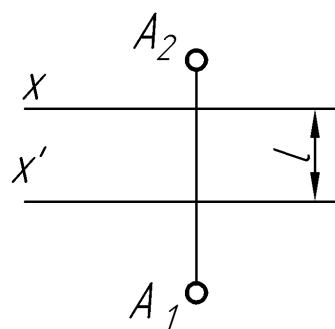


Рис. 1.38

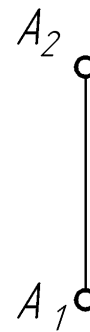


Рис. 1.39

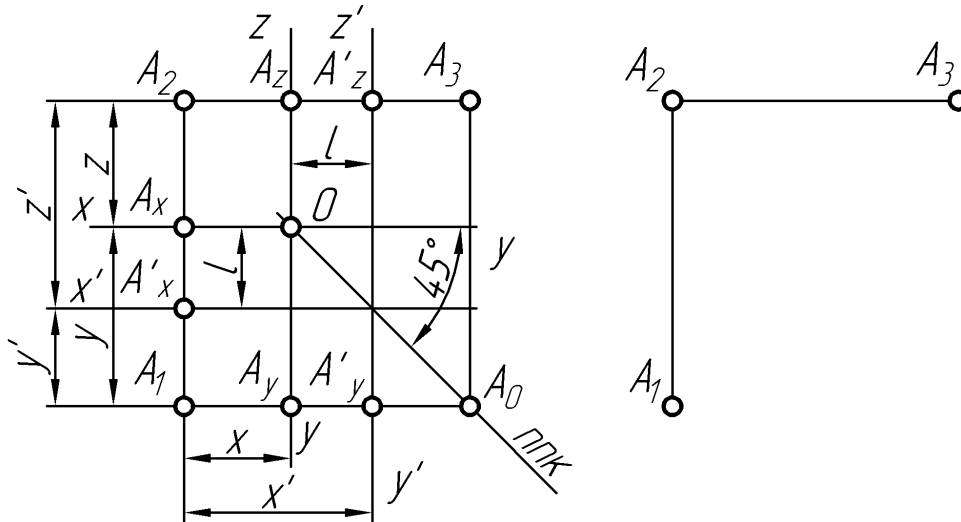
ленні осі проєкцій  $x$  можна не показувати (рис. 1.39).

До аналогічних висновків приходять аналізуючи комплексне креслення проєкцій точки на три взаємно перпендикулярні площини проєкцій (рис. 1.40). В результаті перенесення осі  $x$  вниз на відстань  $l$  площину проєкцій  $\Pi_2$  наближають до точки  $A$ , а площини проєкцій  $\Pi_1$  і  $\Pi_3$  віддаляють від неї на одну і ту ж відстань  $l$ . При цьому вісь  $x$  переміщується у бісекторній площині, що йде з  $II$  в  $IV$  октант, а вісь  $z$  переміщується у бісекторній площині, що йде з  $II$  в  $V$  октант. Початок координат  $O$  переміщується по лінії перерізу вказаних бісекторних площин, яку називають постійною прямою

креслення (**П.П.К.**). Отже, в результаті паралельного перенесення осей  $x$ ,  $y$ ,  $z$  ортогональні проекції точки на три взаємно перпендикулярні площини не змінюють свого положення. Таким чином на даному комплексному кресленні осі проекцій  $x$ ,  $y$  і  $z$  можна не показувати (рис. 1.41).

Для виконання деяких графічних операцій з перетворення проекцій, або для побудови наочних (об'ємних) зображень геометричних фігур необхідно перейти до осного епюра.

Щоб перейти від безосного епюра до осного при проекціюванні точки на дві площини проекцій достатньо провести перпендикуляр до лінії проек-



ційного зв'язку ( $A_1A_2$ ).

Рис. 1.40.

Рис. 1.41.

Щоб безосний епюр перетворити в осний при проекціюванні точки на три площини проекцій використовують постійну пряму креслення (**П.П.К.**), (рис. 1.42). Для цього на базі прямого кута  $A_1A_2A_3$  будують прямокутник  $A_1A_2A_3A_0$ , проводять бісектрису кута  $A_1A_0A_3$ , яка є **П.П.К.** На **П.П.К.** довільно вибирають початок осей проекцій  $O$ , через який проводять осі проекцій  $x$ ,  $y$  і  $z$ . Якщо початок осей проекцій  $O$  знаходиться в середині прямокутника  $A_1A_2A_3A_0$ , то точка знаходиться у першому октанті.

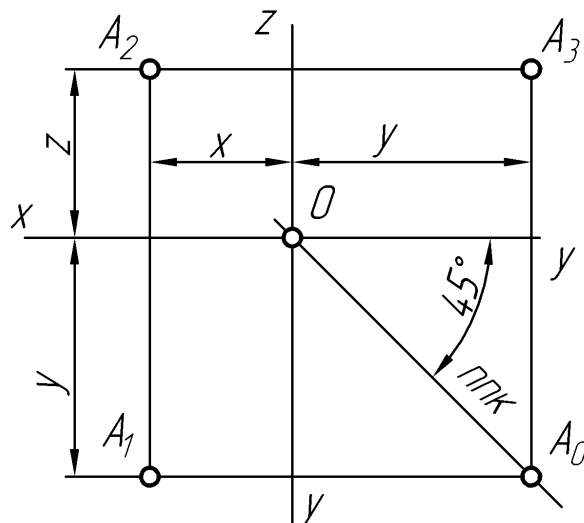
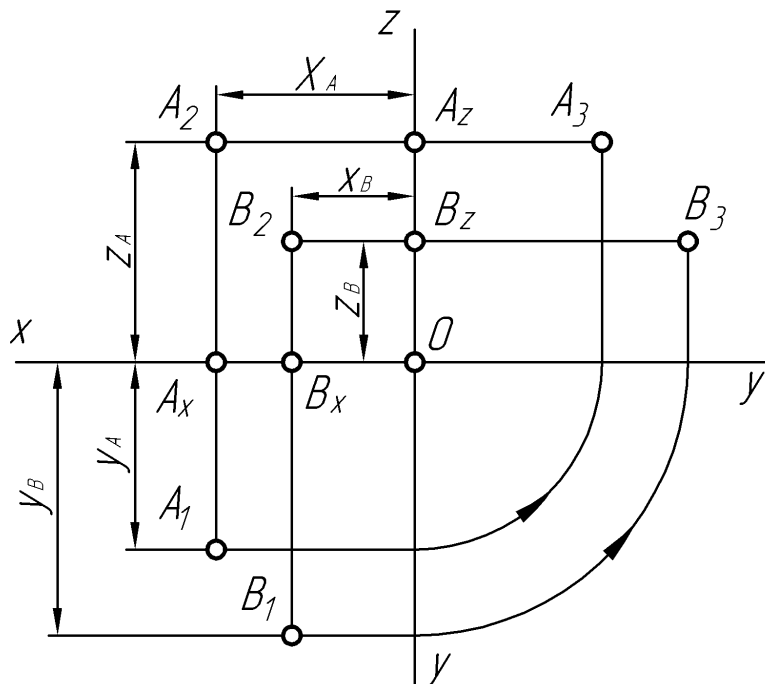


Рис. 1.42

## 1.9. Побудова проєкцій точок за абсолютними координатами

Положення точки в просторі можна задавати з допомогою чисел. Для цього використовують координатний метод. У координатному методі використовують систему прямокутних координат  $Oxyz$ . Система прямокутних координат складається з взаємно перпендикулярних осей координат  $x$  – вісь абсцис,  $y$  – вісь ординат і  $z$  – вісь аплікат, початку координат  $O$  і взаємно перпендикулярних площин координат  $xOy$ ,  $xOz$  і  $yOz$ . Якщо систему взаємно перпендикулярних площин проєкцій  $\Pi_1$   $\Pi_2$   $\Pi_3$  суміщають з системою прямокутних координат, то отримують можливість будувати проєкції точок за їхніми координатами  $x$ ,  $y$  і  $z$  відносно початку осей проєкцій. Це і є побудова проєкцій точок в абсолютних координатах.

Наприклад, дано точку  $A(x_A; y_A; z_A)$  (рис. 1.43). Відповідно для побудови її проєкцій використовують координати  $A_1(x_A; y_A)$ ;  $A_2(x_A; z_A)$ ;  $A_3(y_A; z_A)$ . Під час побудови проєкцій точки  $A$  вздовж осі  $x$  від початку осей проєкцій  $O$  відкладають  $x_A$  і отримують  $A_x$ . Через  $A_x$  проводять вертикальну лінію проєкційного зв'язку і відклавши на ній від осі  $x$   $y_A$  і  $z_A$  відповідно до напрямку осей  $y$  і  $z$ , отримують  $A_1$  і  $A_2$ . Через  $A_2$  проводять горизонтальну лінію проєкційного зв'язку, в місці перетину її з віссю  $z$  отримують точку  $A_z$ . На горизонтальній лінії проєкційного зв'язку від точки  $A_z$  відкладають  $y_A$  і



отримують  $A_3$ . Аналогічно будують проєкції точки  $B(x_B; y_B; z_B)$ .

Рис. 1.43.

Відповідно до значень координат точка може знаходитися в будь-якому октанті. Якщо одна координата точки дорівнює нулю – точка лежить на одній з площин проєкцій. Якщо дві координати точки дорівнюють нулю – точка лежить на одній з осей проєкцій. Якщо три координати точки дорівнюють нулю – точка лежить у початку осей проєкцій. Під час проєкціювання проєкції точок можуть накладатися.

**Завдання 1.1.** За абсолютними координатами побудувати проекції точки  $A(-40; 20; -30)$ .

**Розв'язування.** Будують епюр осей проекцій (рис. 1.44). на осі  $x$  у від'ємному напрямку (праворуч від  $O$ ) відкладають 40 масштабних одиниць, проводять вертикальну лінію проекційного зв'язку і відкладають на ній низ (у додатковому напрямку осі  $y$ ) 20 масштабних одиниць від осі  $x$ , отримують  $A_1$ . На вертикальній лінії проекційного зв'язку (у від'ємному напрямку осі  $z$ ) відкладають 30 масштабних одиниць вниз від осі  $x$ , отримують  $A_2$ . Через  $A_2$  проводять горизонтальну лінію проекційного зв'язку і відкладають на ній праворуч від осі  $z$  (у додатковому напрямку осі  $y$ ) 20 масштабних одиниць, отримують  $A_3$ .

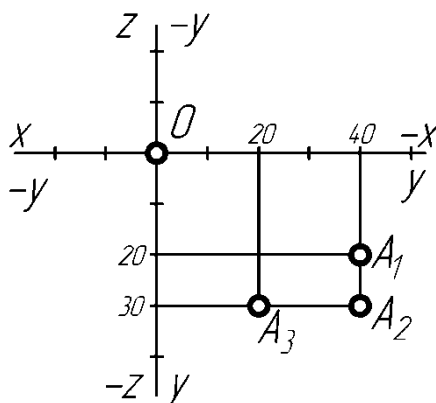


Рис. 1.44

### 1.10. Побудова проекцій точок за відносними координатами

Проекціювання точок за відносними координатами використовують під час виконання безосних епюрів. Для цього одну з заданих точок приймають за базову (основну), а інші точки пов'язують з базовою певними умовами. Для позначення базової точки використовують індекс  $O$ , який розміщують вгорі, ліворуч від букви, якою позначають базову точку ( $^OA$ ). Проекції базової точки розміщують на відповідних лініях проекційного зв'язку на довільних відстанях одна від другої, або вістані задають ( $^OA(l_1; l_2)$ ), де  $l_1 = A_1A_2$ ;  $l_2 = A_2A_3$ . Положення точок, пов'язаних з базовою, задають приростами координат відносно базової точки ( $B(\Delta x_B; \Delta y_B; \Delta z_B)$ ).

Під час проекціювання довільно вибирають положення фронтальної проекції базової точки ( $^OA_2$ ), проводять вертикальну і горизонтальну лінії проекційного зв'язку. На вертикальній лінії проекційного зв'язку на відстані  $l_1$  від  $^OA_2$  будують горизонтальну проекцію базової точки ( $^OA_1$ ), на горизонтальній лінії проекційного зв'язку на відстані  $l_2$  від  $^OA_2$  будують профільну проекцію базової точки ( $^OA_3$ ), (рис. 1.45). Через  $^OA_1$  проводять перпендикуляр до  $^OA_1^OA_2$  на відстані  $\Delta x_B$  від  $^OA_1$  будують вертикальну лінію проекційного зв'язку для точки  $B$ , на якій будують  $B_1$  нижче від  $^OA_1$  на величину  $\Delta y_B$ ,  $B_2$  – вище від  $^OA_2$  на величину  $\Delta z_B$ . Через  $B_2$  проводять горизонтальну лінію проекційного зв'язку для точки  $B$ , на якій праворуч від  $^OA_3$  на відстані  $\Delta y_B$

будують  $B_3$ . Якщо прирости координат від'ємні, то проекції точок будуть у протилежних напрямках.

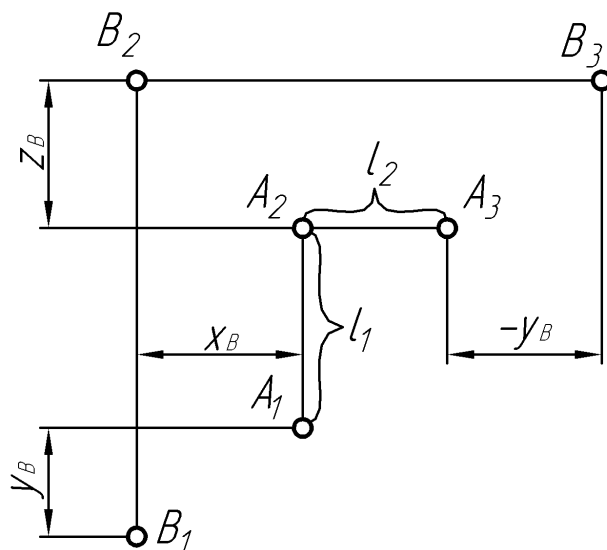


Рис. 1.45.

Оскільки  ${}^0A_1{}^0A_2 = y_A + z_A$ ; а  ${}^0A_2{}^0A_3 = x_A + y_A$ , завжди можна перейти від проєкціювання за відносними координатами до проєкціювання за абсолютними координатами.

**Завдання 1.2.** Побудувати комплексне креслення точок за відносними координатами  ${}^0A(l_1=30; l_2=40)$ ,  $B(40; -30; 20)$ .

**Розв'язування.** Вибирають положення  ${}^0A_2$ , проводять горизонтальну і фронтальну лінії проєкційного зв'язку для  ${}^0A$  (рис. 1.46). На вертикальній лінії проєкційного зв'язку на відстані 30 масштабних одиниць від  ${}^0A_2$  будують  ${}^0A_1$ , на горизонтальній лінії проєкційного зв'язку на відстані 40 масштабних одиниць від  ${}^0A_2$  будують  ${}^0A_3$ . Через  ${}^0A_1$  проводять перпендикуляр до  ${}^0A_1{}^0A_2$ . Ліворуч від  ${}^0A_1{}^0A_2$  на відстані 40 масштабних одиниць проводять вертикальну лінію проєкційного зв'язку для точки  $B$ , на якій вище від  ${}^0A_1$  на 30 масштабних одиниць будують  $B_1$  і вище від  ${}^0A_2$  на 20 масштабних одиниць будують  $B_2$ . Через  $B_2$  проводять горизонтальну лінію проєкційного зв'язку для точки  $B$ , на якій ліворуч від  ${}^0A_3$  на 30 масштабних одиниць будують  $B_3$ .

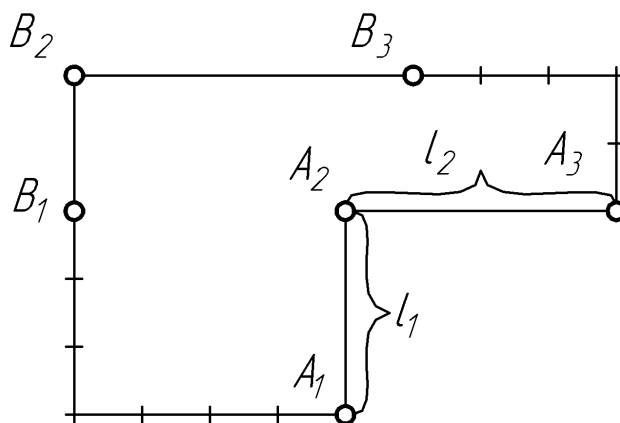


Рис. 1.46.

## Розділ 2

### Проекціювання прямої лінії

#### 2.1. Проекціювання лінії загального положення

Пряму лінію у просторі визначають дві точки, що їй належать. В інженерній графіці прямі лінії розділяють на прямі загального й особливого (окремого) положення. Пряма загального положення не паралельна і не перпендикулярна жодній із площин проекцій. Пряма особливого (окремого) положення паралельна або перпендикулярна до однієї з площин проекцій.

Для побудови проекцій прямої виділяють дві точки (**A** і **B**), що належать прямій, проекціюють їх на площини проекцій і отримані однойменні проекції точок сполучають між собою (рис. 2.1). Комплексне креслення прямої отримують відомим суміщенням  $\Pi_1$  і  $\Pi_2$  в одну площину (рис. 2.2). В результаті такої побудови отримують  $l_1([A_1B_1])$  - горизонтальну проекцію прямої **l** (відрізка **[AB]**) і  $l_2([A_2B_2])$  - фронтальну проекцію прямої **l** (відрізка **[AB]**). Безосний епюр прямої загального положення, спроекційованої на дві площини проекцій, зображено на рис. 2.3.

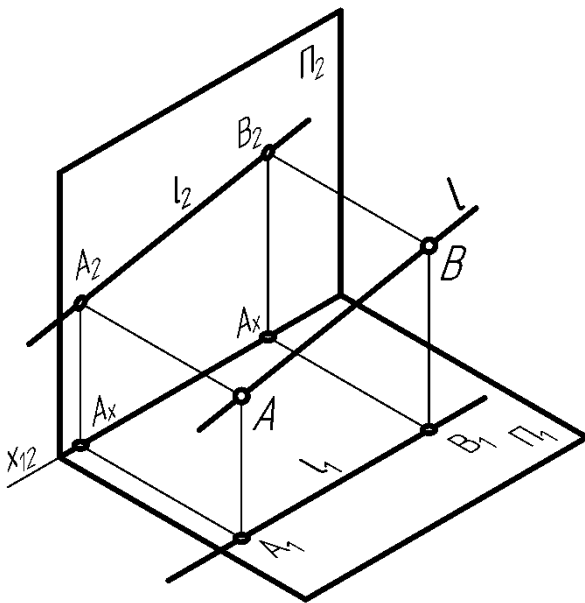


Рис. 2.1

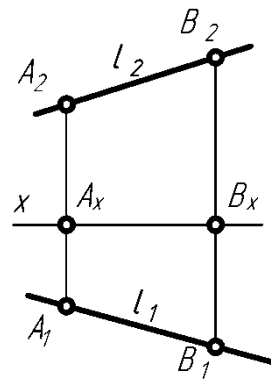


Рис. 2.2

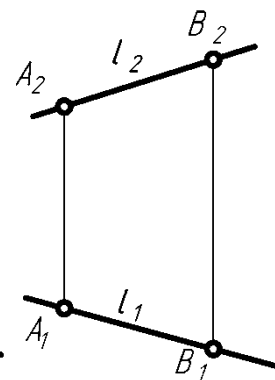


Рис. 2.3

Ортогональні проекції точок, які задають пряму лінію, на дві площини проекцій визначають положення цих точок в просторі. Отже, побудовані на їх основі ортогональні проекції прямої визначають положення цієї прямої у просторі. Таким чином, якщо відомо дві проекції відрізка **[AB]** ( $[A_1B_1]$  і  $[A_2B_2]$ ) на безосному епюрі, завжди можна побудувати третю його проекцію ( $[A_3B_3]$ ). Для цього використовують постійну пряму креслення (**П.П.К.**) або координатний спосіб побудови третьої проекції.

Для реалізації побудови третьої проекції відрізка прямої з використанням **П.П.К.** на одній з вертикальних ліній проекційного зв'язку довільно вибирають початок осей проекцій **O**, через який проводять **П.П.К.** (рис. 2.4). Через фронтальні проекції кінців відрізка  $[A_2B_2]$  проводять горизонтальні

лінії проекційного зв'язку. З горизонтальних проекцій кінців відрізка  $[A_1B_1]$  проводять горизонтальні промені до перетину з **П.П.К.**, в точках перетину заломлюють їх і продовжують у вертикальному напрямку до перетину з відповідними лініями проекційного зв'язку.

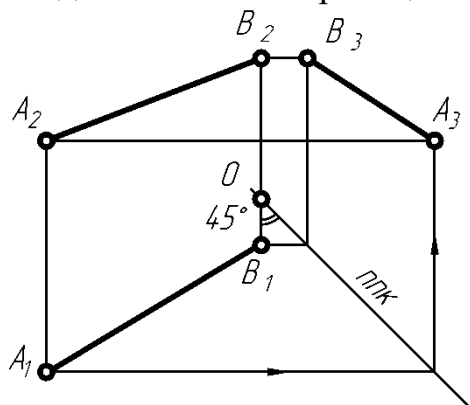


Рис. 2.4

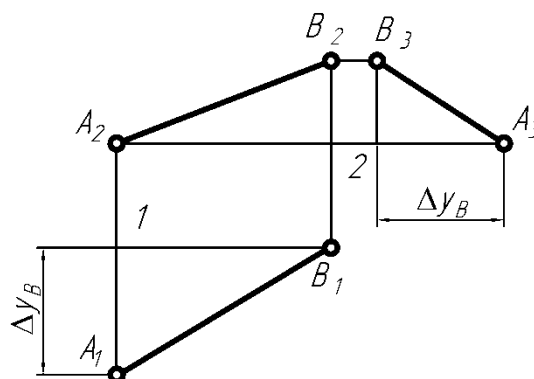


Рис. 2.5

Наведений метод побудови простий і зрозумілий, але для точок, які знаходяться у різних октантах, важко визначити напрям **П.П.К.** Тому на практиці часто користуються координатним методом побудови третьої проекції. Даний метод використовує різницю відстаней точок до **П2**.

Під час побудови проводять горизонтальні лінії проекційного зв'язку через фронтальні проекції кінців відрізка  $[A_2B_2]$ , на одній з проведених горизонтальних ліній проекційного зв'язку довільно будують профільну проекцію точки ( $A_3$ ), проводять з неї перпендикуляр до перетину з іншою горизонтальною лінією проекційного зв'язку (рис. 2.5). З отриманої точки перетину відкладають у потрібному напрямку приріст координати  $y$  ( $\Delta y_B$ ) другої точки відносно першої праворуч, якщо  $B_1$  нижче від  $A_1$ , або ліворуч, якщо  $B_1$  вище від  $A_1$  й отримують профільну проекцію іншої точки ( $B_3$ ).

**Завдання 2.1.** Побудувати горизонтальну проекцію відрізка  $[AB]$ , якщо відомі його фронтальна і профільна проекції ( $[A_2B_2]$ ,  $[A_3B_3]$ ) (рис. 2.6).

**Розв'язування.** Побудову виконують, використовуючи описаний вище координатний метод. Через  $A_2$  і  $B_2$  проводять вертикальні лінії проекційного зв'язку. На вертикальній лінії проекційного зв'язку, яка проходить через  $A_2$ , довільно вибирають  $A_1$ , проводять через  $A_1$  перпендикуляр до перетину з вертикальною лінією проекційного зв'язку, яка проходить через  $B_2$ , від отриманої точки перетину відкладають приріст координати  $y$  ( $\Delta y_B$ ) і отримують  $B_1$ , сполучають  $A_1$  з  $B_1$  і отримують шукану горизонтальну проекцію відрізка  $[AB]$  ( $[A_1B_1]$ ).



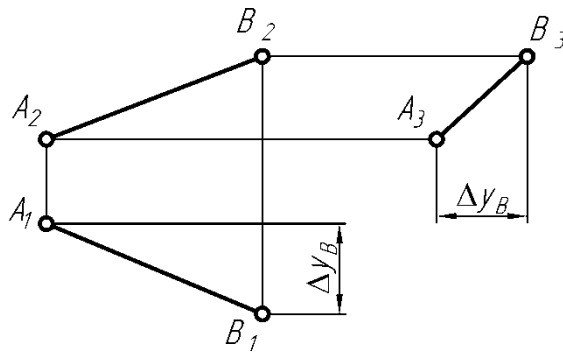


Рис. 2.6

## 2.2. Побудова проєкцій слідів прямої на площинах проєкцій

Слід прямої – це точка її перетину з площиною проєкцій. Пряма загального положення перетинає три площини проєкцій, отже утворює три сліди на площинах проєкцій: горизонтальний слід прямої ( $H$ ) – точка перетину прямої з  $\Pi_1$ ; фронтальний слід прямої ( $F$ ) – точка перетину прямої з  $\Pi_2$ ; профільний слід прямої ( $P$ ) – точка перетину прямої з  $\Pi_3$ . У результаті проєкціювання слідів прямої на площини проєкцій отримують:  $H_1$  – горизонтальну проєкцію горизонтального сліду;  $H_2$  – фронтальну проєкцію горизонтального сліду;  $H_3$  – профільну проєкцію горизонтального сліду;  $F_1$  – горизонтальну проєкцію фронтального сліду;  $F_2$  – фронтальну проєкцію фронтального сліду;  $F_3$  – профільну проєкцію фронтального сліду;  $P_1$  – горизонтальну проєкцію профільного сліду;  $P_2$  – фронтальну проєкцію профільного сліду;  $P_3$  – профільну проєкцію профільного сліду (рис. 2.7).

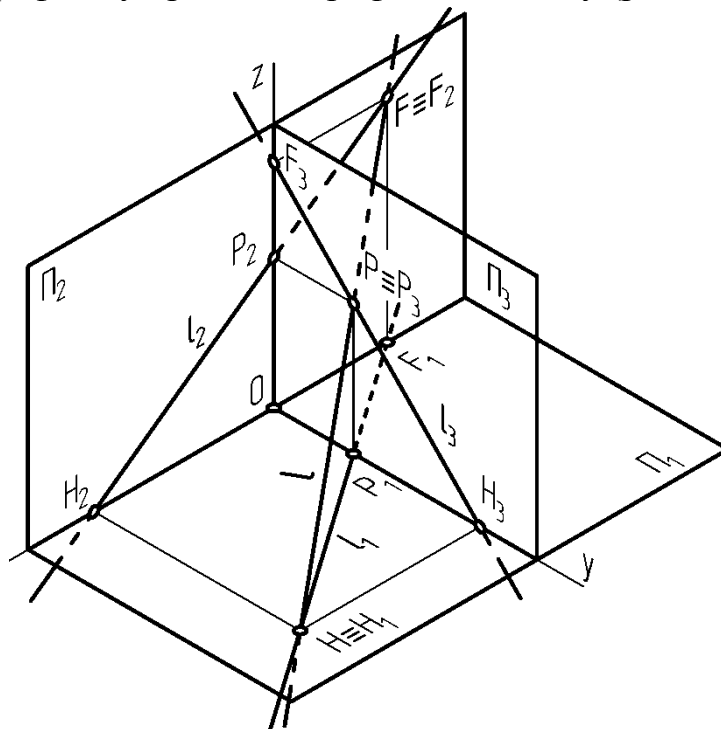


Рис. 2.7

Оскільки, за умовами побудови сліди прямої лежать в одній з площин проєкцій, то дві з трьох проєкцій сліду завжди лежать на відповідних осях

проекцій.  $H_2$  і  $F_1$  лежать на осі  $x$  ( $H_2 \in x$ ,  $F_1 \in x$ );  $H_3$  і  $P_1$  лежать на осі  $y$  ( $H_3 \in y$ ,  $P_1 \in y$ );  $F_3$  і  $P_2$  лежать на осі  $z$  ( $F_3 \in z$ ,  $P_2 \in z$ ). Комплексне креслення слідів прямої зображено на рис. 2.8.

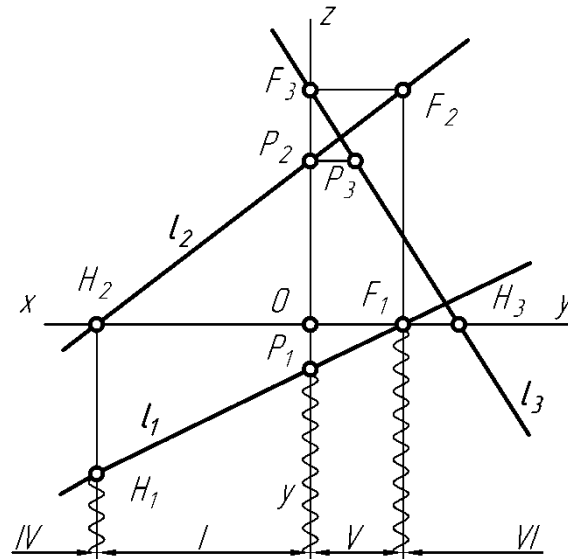


Рис. 2.8

Для графічного розв'язання багатьох задач інженерної графіки необхідно будувати проекції слідів прямої і визначати, через які чверті або октанти простору пряма проходить. Щоб побудувати проекцію горизонтального сліду прямої, продовжують її фронтальну проекцію до перетину з віссю  $x$  (рис. 2.9) й отримують  $H_2$  ( $l_2 \cap x = H_2$ ). Через  $H_2$  проводять вертикальну лінію проекційного зв'язку до перетину з горизонтальною проекцією прямої і отримують  $H_1$  ( $H_1 \equiv H$ ). Аналогічно будують проекції інших слідів прямої і отримують  $F_2 \equiv F$ ,  $P_3 \equiv P$ .

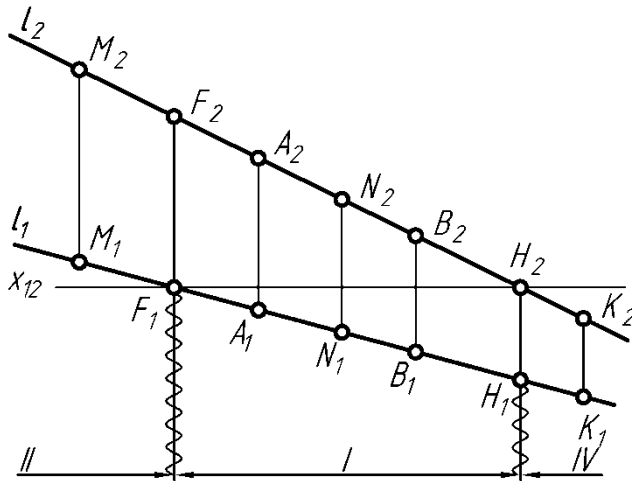


Рис. 2.9

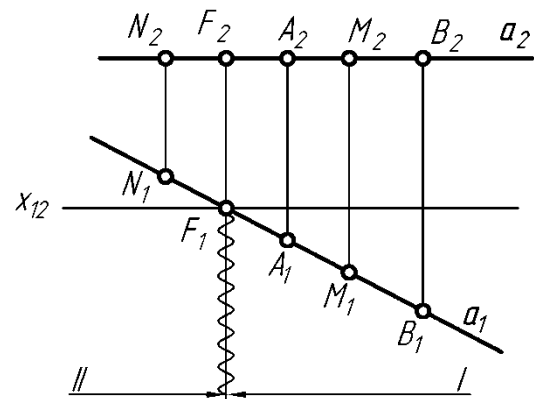


Рис. 2.10

Під час визначення чвертей простору, через які проходить пряма, враховують, що пряма проходить через три чверті простору, якщо вона утворює два сліди з площинами  $\Pi_1$  і  $\Pi_2$ , якщо пряма утворює один слід, то вона проходить через дві чверті, якщо пряма з площинами  $\Pi_1$  і  $\Pi_2$  слідів не утворює, то вона проходить через одну чверть ( $l \perp \Pi_3$ ). Для визначення, через які чверті простору пряма проходить ліворуч і праворуч від кожного сліду прямої,

вибирають довільні точки, які їй належать (рис. 2.9) ( $M \in l$ ,  $N \in l$ ,  $K \in l$ ) і визначають, в яких чвертях вони розміщені.  $M_1$  і  $M_2$  розміщені над віссю  $x$ , отже точка  $M$  розміщена у другій чверті, а пряма  $l$  проходить через другу чверть;  $N_1$  розміщена під віссю  $x$ , а  $N_2$  – над віссю  $x$ , отже точка  $N$  розміщена у першій чверті, а пряма  $l$  проходить через першу чверть,  $K_1$  і  $K_2$  розміщені під віссю  $x$ , отже  $K$  розміщена у четвертій чверті, а пряма  $l$  проходить через четверту чверть.

**Завдання 2.2.** Побудувати сліди прямої  $a$  і визначити, через які чверті простору вона проходить (рис. 2.10).

**Розв’язування.** Фронтальна проекція прямої паралельна осі  $x$  ( $a_2 \parallel x$ ), отже пряма утворює з площинами проекцій один слід ( $F$ ) і проходить через дві чверті. Продовжують  $a_1$  до перетину з  $x$  і отримують  $F_1$  ( $a_1 \cap x = F_1$ ). Через  $F_1$  проводять вертикальну лінію проекційного зв’язку до перетину з  $a_2$  й отримують  $F_2 \equiv F$ . Ліворуч і праворуч від  $F$  довільно вибирають на  $a$  точки  $M$ ,  $N$ .  $M_1$  розміщена під віссю  $x$ ,  $M_2$  – над віссю  $x$ , отже праворуч від  $F$  пряма  $a$  проходить через першу чверть.  $N_1$  і  $N_2$  розміщені над віссю  $x$ , отже ліворуч від  $F$  пряма проходить через другу чверть.

### 2.3. Проекціювання прямих, які займають особливе положення відносно площин проекцій

Лінії особливого (окремого) положення поділяють на лінії рівня і лінії проекціюючі. Лінії рівня паралельні до однієї з площин проекцій і носять назву площини, до якої вони паралельні. Для їх позначень використовують букви  $h$ ,  $f$ ,  $p$ .

Пряму, паралельну до  $\Pi_1$ , називають горизонтальною прямою. Фронтальна проекція горизонтальної прямої паралельна до осі  $x$  ( $h_2 \parallel x$ ), профільна її проекція паралельна до осі  $y$  ( $h_3 \parallel y$ ) (рис. 2.11). Відрізок горизонтальної прямої проекціюють на  $\Pi_1$  в натуральну величину ( $AB = A_1B_1$ ).

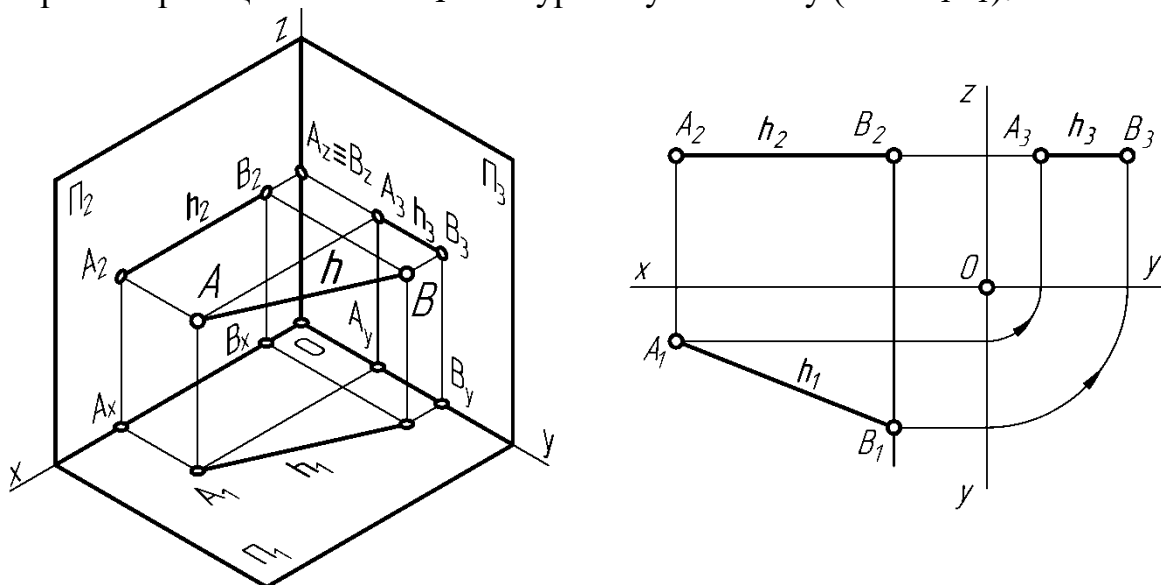


Рис. 2.11

Пряму, паралельну до  $\Pi_2$ , називають фронтальною прямою. Горизонтальна проекція фронтальної прямої паралельна до осі  $x$  ( $f_1 \parallel x$ ), профільна її проекція паралельна до осі  $z$  ( $f_3 \parallel z$ ) (рис. 2.12). Відрізок на фронтальній прямій проєкціюють на  $\Pi_2$  в натуральну величину ( $CD = C_2D_2$ ).

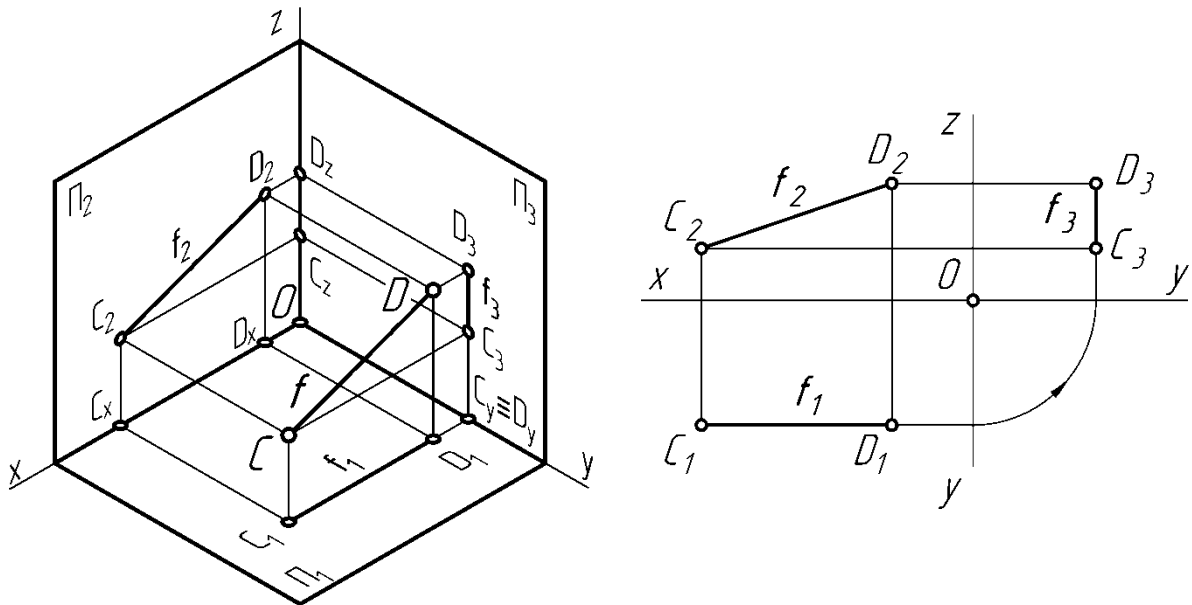


Рис. 2.12

Пряму, паралельну до  $\Pi_3$ , називають профільною прямою. Горизонтальна проекція профільної прямої паралельна до осі  $y$  ( $p_1 \parallel y$ ), фронтальна її проекція паралельна до осі  $z$  ( $p_2 \parallel z$ ) (рис. 2.13). Відрізок на профільній прямій проєкціюють на  $\Pi_3$  у натуральну величину ( $MN = M_3N_3$ ).

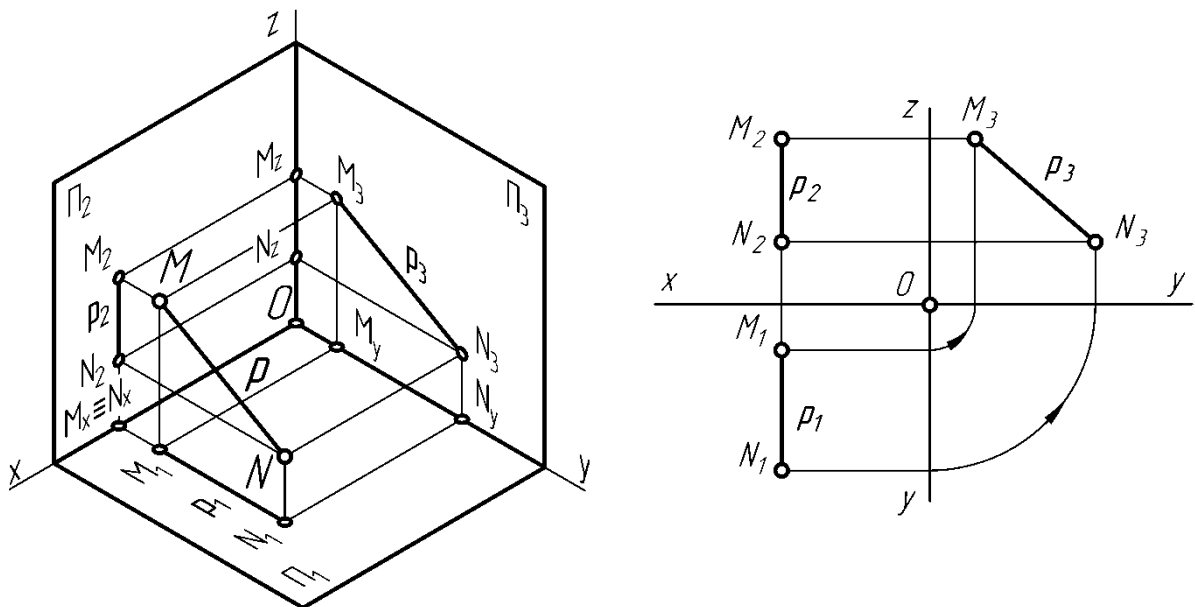


Рис. 2.13

Лінії проєкціюючі паралельні до двох площин проєкцій, перпендикулярні до третьої площини проєкцій і носять назву площини, до якої вони перпендикулярні.

Пряму, перпендикулярну до  $\Pi_1$ , називають горизонтально-проекціюючою. Фронтальна проекція горизонтально-проекціюючої прямої перпендикулярна до осі  $x$  ( $a_2 \perp x$ ), профільна її проекція перпендикулярна до осі  $y$  ( $a_3 \perp y$ ) (рис. 2.14). На  $\Pi_1$  горизонтально-проекціюючу пряму проекціюють у точку.

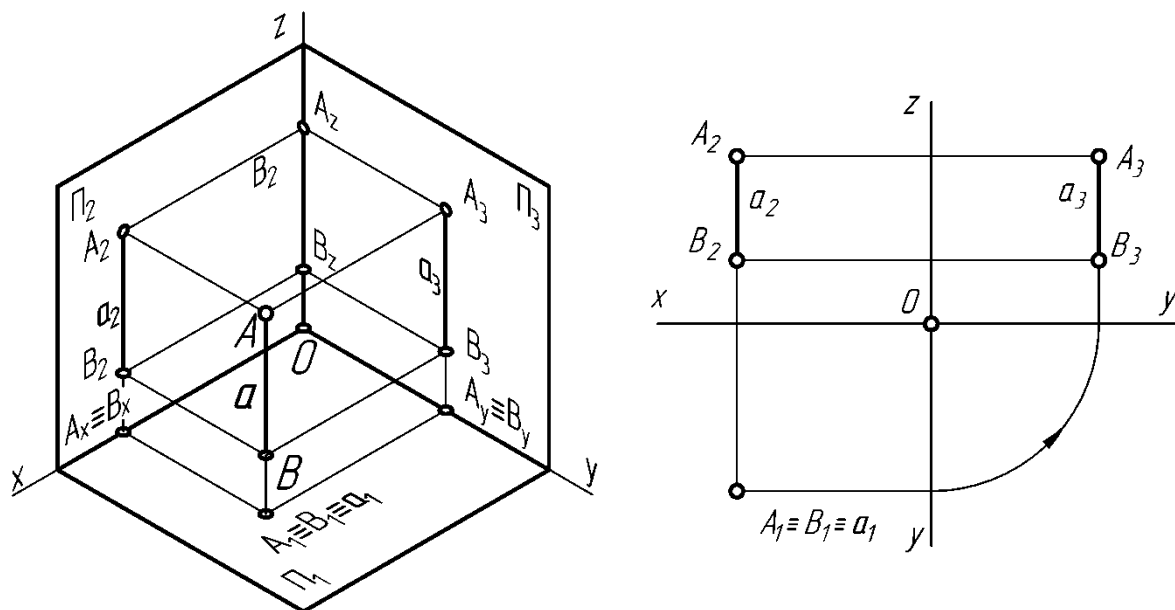


Рис. 2.14

Пряму, перпендикулярну до  $\Pi_2$ , називають фронтально-проекціюючою. Горизонтальна проекція фронтально-проекціюючої прямої перпендикулярна до осі  $x$  ( $b_1 \perp x$ ), профільна її проекція перпендикулярна до осі  $z$  ( $b_3 \perp z$ ) (рис. 2.15). На  $\Pi_2$  фронтально-проекціюючу пряму проекціюють у точку.

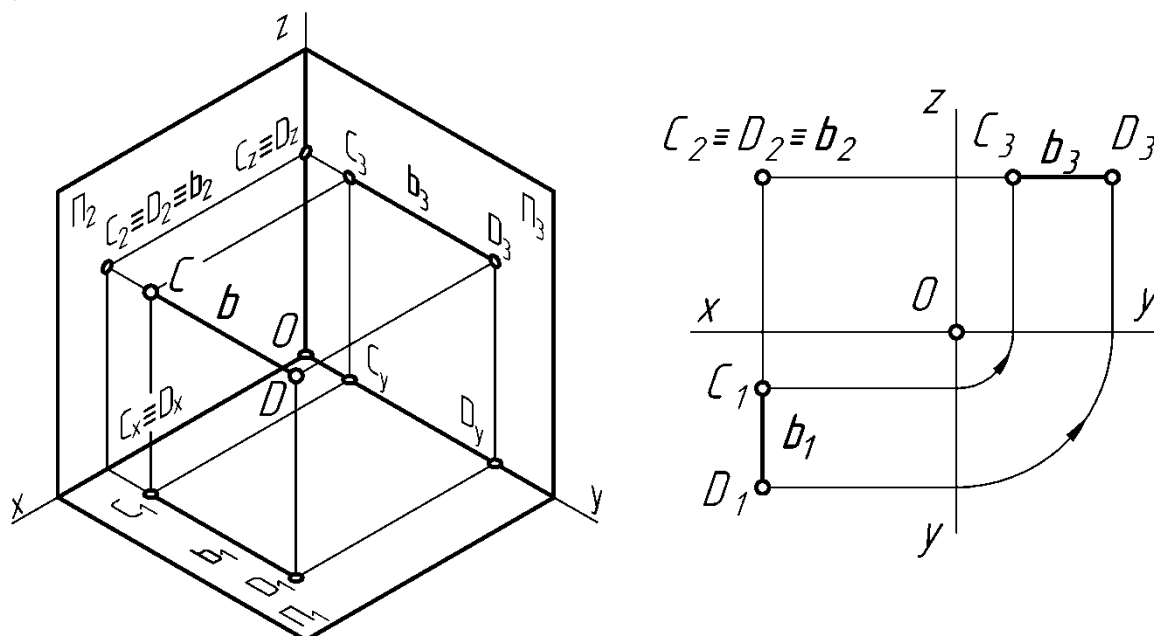


Рис. 2.15

Пряму, перпендикулярну до  $\Pi_3$ , називають профільно-проекціюючою. Горизонтальна і фронтальна проекції профільно-проекціюючої прямої

паралельні до осі  $x$  ( $c_1 \parallel x \parallel c_2$ ) (рис. 2.16). На  $\Pi_3$  профільно-проекціуючу пряму проєкціюють у точку.

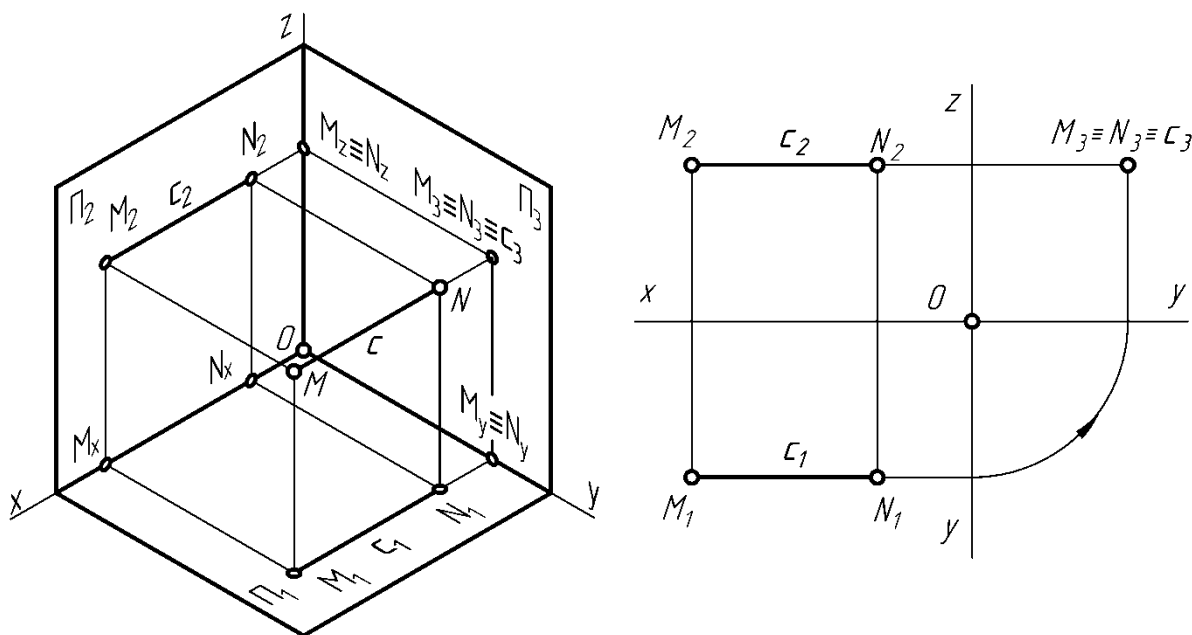


Рис. 2.16

## 2.4. Взаємне розміщення точки і прямої

Точка може належати прямій або знаходитися за її межами.

Точка належить прямій, якщо її проєкції лежать на однойменних проєкціях прямої ( $A \in l \Rightarrow A_1 \in l_1, A_2 \in l_2$ ) (рис. 2.17). Якщо проєкції точки лежать на різнойменних проєкціях прямої – точка прямій не належить ( $B \notin l$ ), просто проєкції точки накладаються на проєкції прямої.

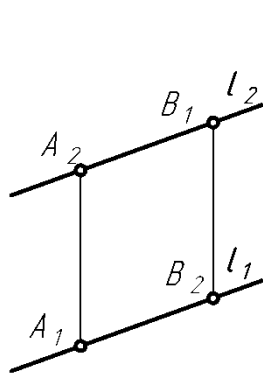


Рис. 2.17

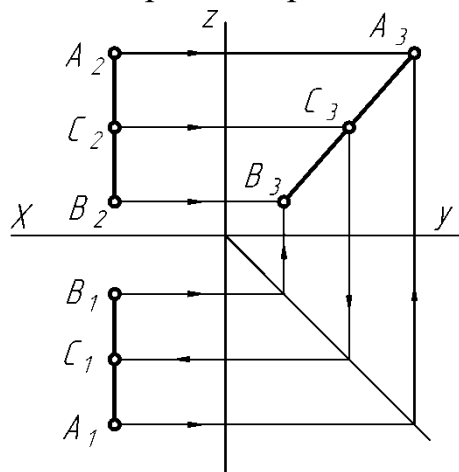


Рис. 2.18

Дві проєкції прямої особливого положення не завжди дозволяють визначити положення у просторі точок, які їй належать. Горизонтальна і фронтальна проєкції профільної прямої не визначають положення у просторі точки, яка їй належить. Тому для побудови проєкції точки  $C$ , яка належить відрітку  $[AB]$  профільної прямої, використовують його профільну проєкцію (рис. 2.18).

Для побудови на горизонтальній і фронтальній проекціях профільної прямої проекцій точки, яка їй належить, можна використовувати додаткову пряму  $l_0$  або промінь переломлення  $s$ .

Нехай профільна пряма задана точками  $A(A_1, A_2)$  і  $B(B_1, B_2)$  і відомо положення горизонтальної проекції точки  $C(C_1)$ , яка належить прямій  $p$ . Для побудови  $C_2$  через одну з фронтальних проекцій кінців відрізка ( $B_2$ ) під довільним гострим кутом до  $p_2$  будують додаткову пряму  $l_0$ , на якій методом засічок будують відрізок  $B_2A_0 = B_1A_1$  (рис. 2.19) і  $B_2C_0 = B_1C_1$ . З'єднують між собою точки  $A_0$  і  $A_2$ , через  $C_0$  проводять пряму, паралельну  $A_0A_2$  до перетину з  $B_2A_2$  й отримують  $C_2$  – фронтальну проекцію точки  $C$ .

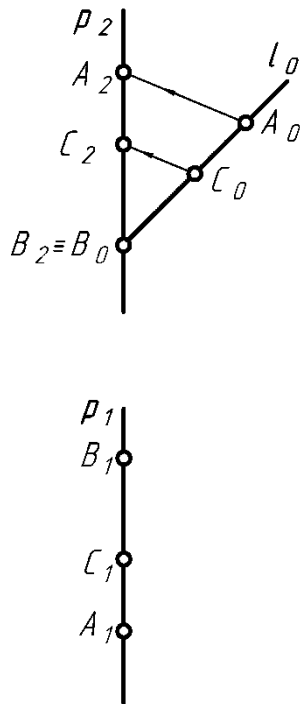


Рис. 2.19

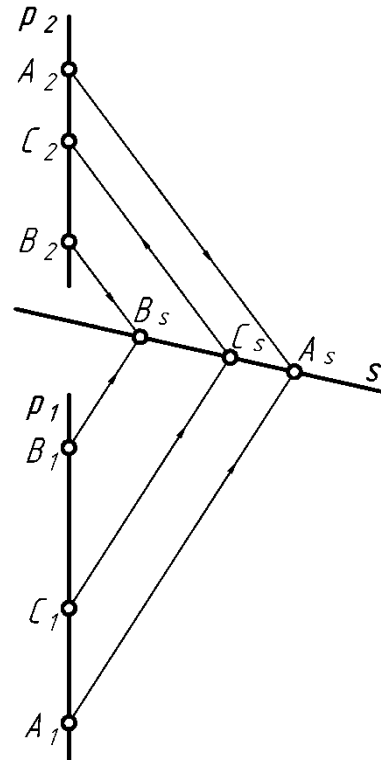


Рис. 2.20

Для побудови проекцій точки, яка належить профільній прямій з використанням променя переломлення  $s$  через однойменні проекції точок, які задають профільну пряму ( $A_1$  і  $B_1$ ), проводять два паралельні між собою довільно напрямлені промені до перетину в точках  $A_s$  і  $B_s$  з відповідними паралельними між собою променями, які будують аналогічно з інших однойменних проекцій точок, які задають профільну пряму ( $A_2$  і  $B_2$ ). Через  $A_s$  і  $B_s$  будують промінь переломлення  $s$ . Через відому проекцію точки  $C(C_1)$ , яка належить заданій прямій, проводять промінь, паралельний до  $A_1A_s$  до перетину з  $s$ , отримують  $C_s$ . Через  $C_s$  проводять промінь, паралельний до  $A_sA_2$  до перетину з  $B_2A_2$  й отримують  $C_2$  (рис. 2.20).

Виходячи зі сказаного вище, вважають: якщо хоча б одна з проекцій точки не лежить на однойменній проекції прямої – точка знаходиться за межами прямої (прямій не належить). Для зручності визначення положення точок відносно прямої використовують умовні характеристики розташування точок: “над”, “під”, “перед”, “за”, “праворуч”, “ліворуч”.

Приклади розташування точок відносно прямої в просторі зображено на рис. 2.21. На рис. 2.22 зображено комплексне креслення цих точок на  $\Pi_1$  і  $\Pi_2$ . Відповідно до розглянутого вище закону належності точка  $A$  належить прямій  $m$  ( $A \in m$ ); точка  $C$  розміщена над прямою; точка  $D$  розміщена під прямою; точка  $M$  розміщена перед прямою; точка  $L$  розміщена за прямою; точка  $E$  розміщена над і перед прямою; точка  $F$  розміщена над і за прямою; точка  $K$  розміщена під і перед прямою; точка  $N$  розміщена під і за прямою  $l$ .

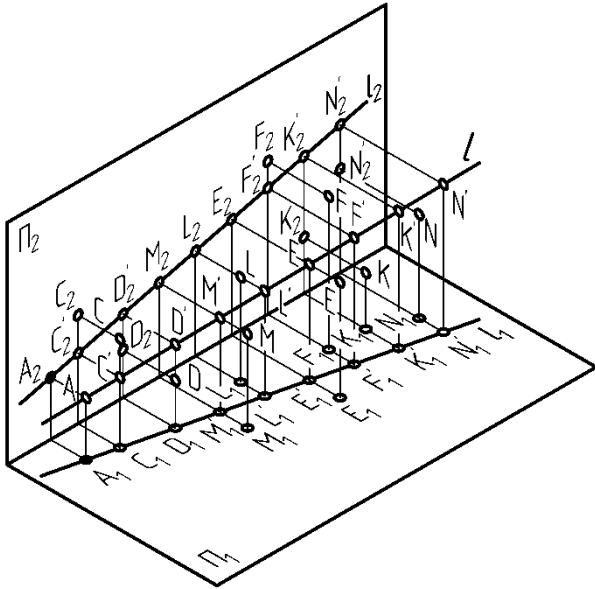


Рис. 2.21

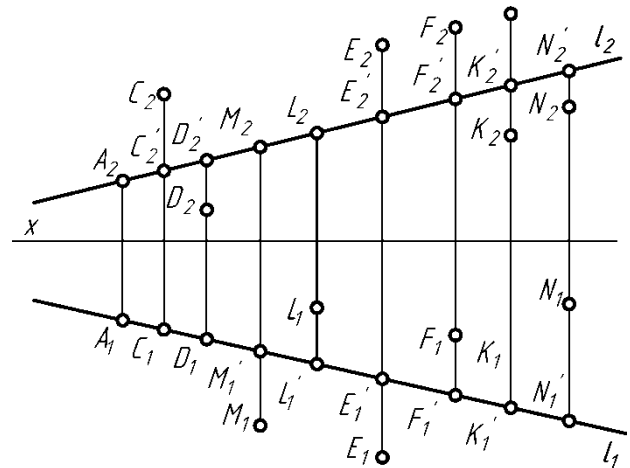


Рис. 2.22

**Завдання 2.3.** Побудувати другі проекції точок  $C$  і  $D$ , які належать заданому відрізку  $[AB]$  профільної прямої (рис. 2.23).

**Розв'язування.** Будують промінь переломлення  $s$ . Через  $A_1$  і  $B_1$  проводять під довільним кутом до  $A_1B_1$  паралельні між собою промені. Через  $A_2$  і  $B_2$  проводять паралельні між собою промені до перетину з попередньо проведеними променями. В перетині променів, які проведені через проекції однойменних точок, отримують точки  $A_s$  і  $B_s$  ( $A_1A_s \cap A_2A_s = A_s$ ,  $B_1B_s \cap B_2B_s = B_s$ ). З'єднують точки  $A_s$  і  $B_s$  і отримують промінь переломлення  $s$ .

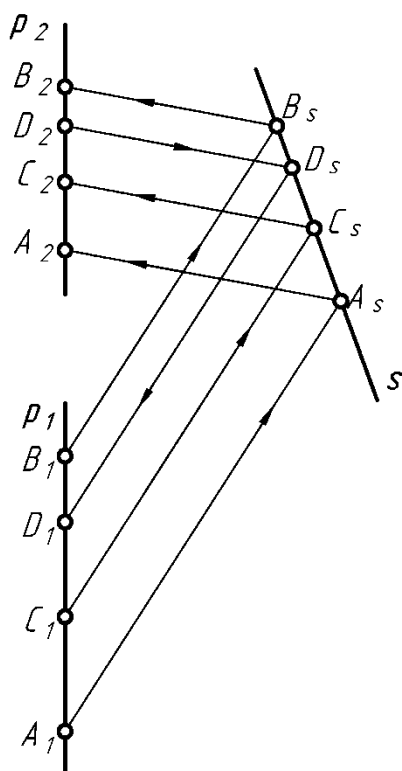
Через  $C_1$  проводять промінь, паралельний до  $A_1A_s$  до перетину з  $s$ , отримують точку  $C_s$  ( $A_1A_s \parallel C_1C_s$ ). Через  $C_s$  проводять промінь, паралельний до  $A_2A_s$  до перетину з  $A_2B_2$ , отримують точку  $C_2$  ( $A_2A_s \parallel C_2C_s$ ).

Через  $D_2$  проводять промінь, паралельний до  $A_2A_s$  до перетину з  $s$ , отримують точку  $D_s$  ( $A_2A_s \parallel D_2D_s$ ). Через  $D_s$  проводять промінь, паралельний до  $A_1A_s$  до перетину з  $A_1B_1$ , отримують точку  $D_1$  ( $A_sA_1 \parallel D_sD_1$ ).

## 2.5. Поділ відрізка прямої у заданому відношенні

Поділ відрізка прямої у заданому відношенні зводять до побудови проекцій точки, яка належить відрізку прямої. Поділ ґрунтується на властивості паралельного проєціювання, що відношення відрізків прямої лінії дорівнює відношенню проєкцій цих відрізків ( $AM:MB = A_1M_1:M_1B_1 = A_2M_2:M_2B_2$ ).





Отже, для поділу відрізка прямої  $[AB]$  у заданому відношенні достатньо поділити у такому відношенні одну з його проекцій і спроекціювати точку поділу на інші проекції відрізка.

Нехай відрізок  $[AB]$  ( $[A_1B_1]$ ,  $[A_2B_2]$ ) необхідно поділити у відношенні  $2:3$ . Для цього через одну з проекцій кінців відрізка ( $A_1$ ) проводять довільну додаткову пряму  $l_0$  (рис. 2.24), на якій відкладають 5 довільних, але рівних між собою відрізків і отримують  $B_0$ , сполучають  $B_0$  і  $B_1$ . На відстані  $2/5$  від  $A_1$  будують  $M_0$ , через  $M_0$  проводять пряму паралельну до  $B_0B_1$  до перетину з  $A_1B_1$  і отримують  $M_1$  ( $M_1M_0 \parallel B_0B_1$ ). Через  $M_1$  проводять вертикальну лінію проекційного зв'язку до перетину з  $A_2B_2$  і отримують  $M_2$ .

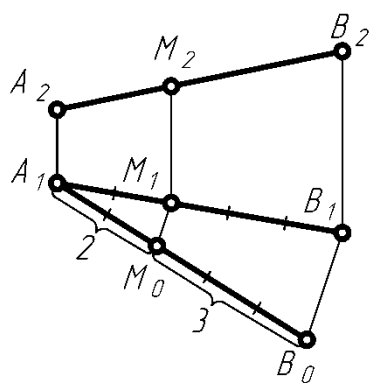


Рис. 2.24

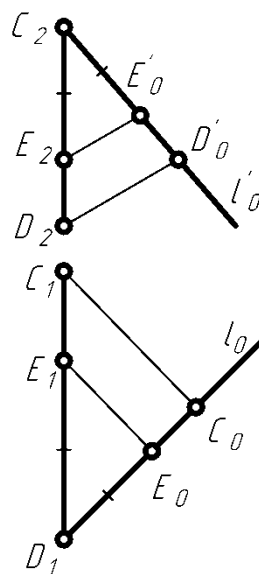


Рис. 2.25

**Завдання 2.4.** Поділити відрізок  $[CD]$  профільної прямої точкою  $E$  у відношенні  $1:2$  (рис. 2.25).

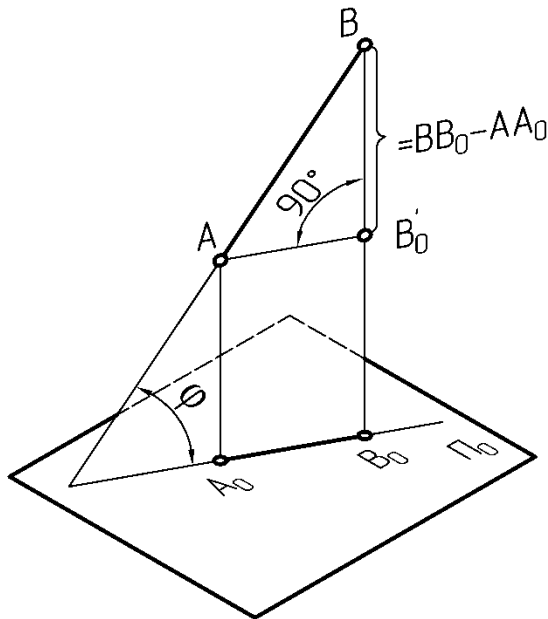
**Розв'язування.** Через  $D_1$  проводять довільну додаткову пряму  $l_0$ , на якій відкладають 3 рівних відрізків й отримують  $C_0$ , сполучають  $C_0$  і  $C_1$ . На відстані  $1/3$  від  $C_0$  будують  $E_0$ , проводять пряму, паралельну до  $C_0C_1$  до перетину з  $C_1D_1$  і отримують  $E_1$ .

Через  $C_2$  проводять довільну додаткову пряму  $l'_0$ , на якій відкладають 3 рівних відрізків й отримують  $D'_0$ , сполучають  $D'_0$  і  $D_2$ . На відстані  $1/3$  від

$C_2$  будують  $E^I_0$ , через  $E^I_0$  проводять пряму, паралельну до  $D_0D_2$  до перетину з  $C_2D_2$  і отримують  $E_2$ .

## 2.6. Побудова на кресленні натуральної величини відрізка прямої і кутів нахилу прямої до площин проекцій

Відрізки прямої загального положення не можуть проєкціюватися на площини проєкцій у натуральну величину. Тобто проєкція відрізка прямої загального положення завжди менша за натуральну величину самого відрізка.



Аналіз процесу ортогонального проєкціювання відрізка прямої загального положення на довільну площину проєкцій  $\Pi_0$  (рис. 2.26) призводить до висновку, що відрізок  $[AB]$  є гіпотенузою прямокутного трикутника  $ABB^I_0$ , в якому один катет дорівнює проєкції відрізка на  $\Pi_0$  ( $AB^I_0 = A_0B_0$ ), а другий катет дорівнює різниці віддалей кінців відрізка до  $\Pi_0$  ( $BB^I_0 = BB_0 - AA_0$ ). При цьому кут  $\alpha$  нахилу прямої до  $\Pi_0$  дорівнює куту між прямою і її проєкцією на  $\Pi_0$ . Але для графічного визначення натуральної величини відрізка  $[AB]$  розглядають його проєкції на  $\Pi_1$  і  $\Pi_2$  (рис. 2.27). Відрізок  $[AB]$  проєкціюють на  $\Pi_1$  і  $\Pi_2$  і отримують  $[A_1B_1]$  – горизонтальну

проєкцію відрізка і  $[A_2B_2]$  – фронтальну проєкцію відрізка. Через  $A$  проводять  $AB_0$  паралельно до  $[A_1B_1]$  ( $AB_0 \parallel [A_1B_1]$ ), через  $B$  проводять  $BA_0$  паралельно до  $[A_2B_2]$  ( $BA_0 \parallel [A_2B_2]$ ). Отримані два прямокутні трикутники  $AB_0B$  і  $AA_0B$  характеризує спільна гіпотенуза  $AB$ , яка одночасно є натуральною величиною відрізка  $[AB]$ . Відповідно кут  $BAB_0 = \alpha$  – кут нахилу  $[AB]$  до  $\Pi_1$ , кут  $ABA_0 = \beta$  – кут нахилу  $[AB]$  до  $\Pi_2$ . Оскільки  $AB_0 = A_1B_1$ ,  $A_0B = A_2B_2$ , а  $B_0B$  – різниця відстаней від кінців відрізка (точок  $A$  і  $B$ ) до  $\Pi_1$  ( $B_0B = BB_1 - AA_1 = z_B - z_A = \Delta z$ ),  $AA_0$  – різниця відстаней від кінців відрізка (точок  $A$  і  $B$ ) до  $\Pi_2$  ( $AA_0 = AA_1 - BB_1 = y_A - y_B = \Delta y$ ) (рис. 2.28), отримують залежність  $(AB)^2 = (A_1B_1)^2 + (\Delta z)^2 = (A_2B_2)^2 + (\Delta y)^2$ .

Отримана залежність дозволяє сформулювати правило трикутника, яке використовують для графічного визначення натуральної величини відрізка прямої загального положення і величини кутів її нахилу до відповідних площин проєкцій.

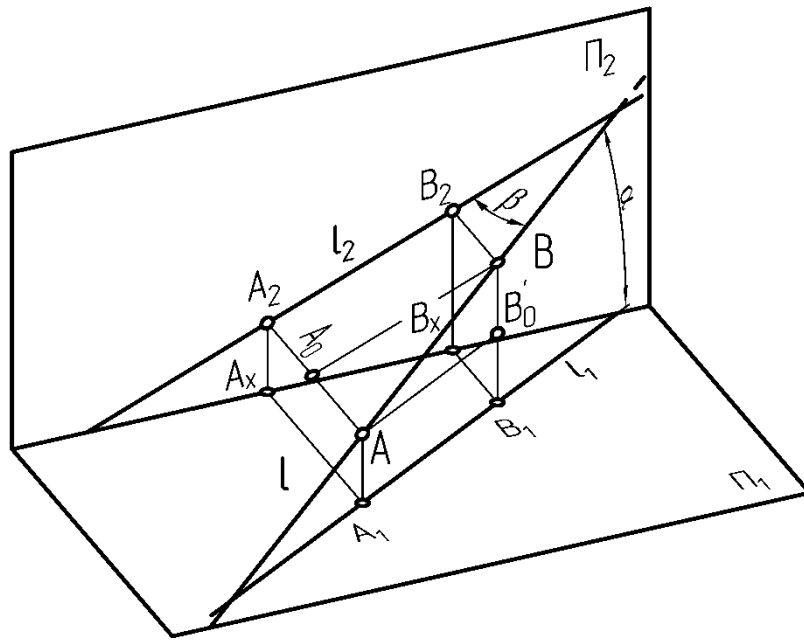


Рис. 2.27

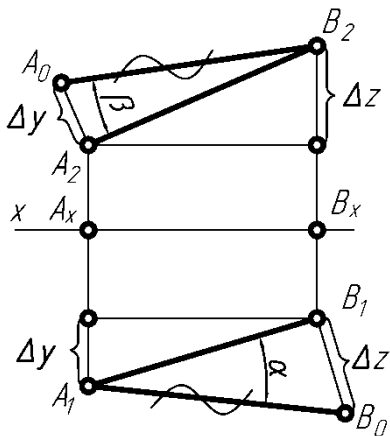


Рис. 2.28

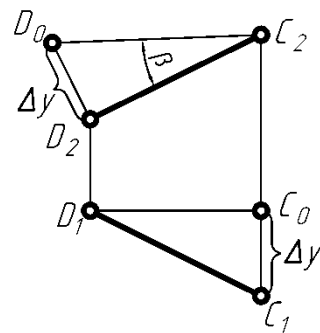


Рис. 2.29

Натуральна величина відрізка прямої дорівнює гіпотенузі прямокутного трикутника, якщо один його катет дорівнює проекції відрізка на одну з площин проекцій, а другий катет дорівнює різниці відстаней від кінців відрізка до тієї ж площини проекцій, кут між відповідною проекцією відрізка та його натуральною величиною також дорівнює натуральній величині кута нахилу прямої до цієї площини проекцій. Щоб визначити кути нахилу прямої до всіх площин проекцій необхідно, побудову його натуральної величини виконувати на проекціях відрізків на дані площини.

**Завдання 2.5.** Визначити натуральну величину відрізка  $[CD]$  і величину кута його нахилу до  $\Pi_2$  (рис. 2.29).

**Розв'язування.** Для визначення натуральної величини відрізка  $[CD]$  ( $[C_1D_1]$ ,  $[C_2D_2]$ ) використовують правило прямокутного трикутника. Оскільки необхідно визначити кут нахилу відрізка  $[CD]$  до  $\Pi_2$ , побудову виконують на фронтальній проекції відрізка ( $[C_2D_2]$ ). Отже розглядають  $[C_2D_2]$  як катет прямокутного трикутника. Через  $D_2$  проводять перпендикуляр до

$[C_2D_2]$ , на якому відкладають  $\Delta y$  – різницю відстаней від  $C_1$  і  $D_1$  до  $\Pi_2$ . Для визначення  $\Delta y$  через  $C_1$  проводять вертикальний промінь, через  $D_1$  – горизонтальний промінь. У точці перетину променів отримують  $C_0$ . Тоді  $C_1C_0 = \Delta y$ . Відклавши на перпендикулярі від  $D_2$   $\Delta y$ , отримують  $D_0$ . Отже  $C_2D_0$  – натуральна величина відрізка  $[CD]$ , кут  $D_2C_2C_0 = \beta$  – величина кута нахилу  $[CD]$  до  $\Pi_2$ .

## 2.7. Взаємне розташування прямих у просторі

У просторі прямі можуть збігатися, перетинатися, бути паралельними і мимобіжними.

Якщо прямі збігаються, то на комплексному кресленні їх однойменні проекції також збігаються ( $a \equiv b \Rightarrow a_1 \equiv b_1, a_2 \equiv b_2$ ) (рис. 2.30).

Якщо прямі паралельні, то їх однойменні проекції також паралельні (рис. 2.31) ( $c \parallel d \Rightarrow c_1 \parallel d_1, c_2 \parallel d_2$ ).

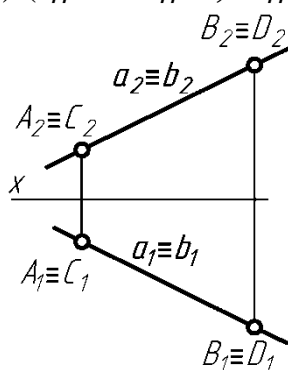


Рис. 2.30

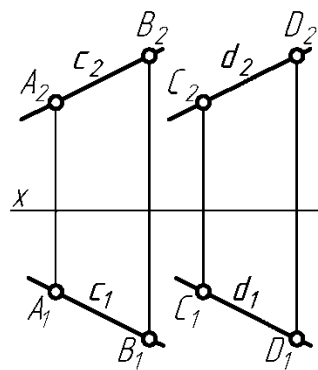


Рис. 2.31

Якщо прямі перетинаються, то їх однойменні проекції теж перетинаються і проекції точок перетину розташовані на відповідних лініях проекційного зв'язку (рис. 2.32) ( $l \cap m = N \Rightarrow l_1 \cap m_1 = N_1, l_2 \cap m_2 = N_2$ ).

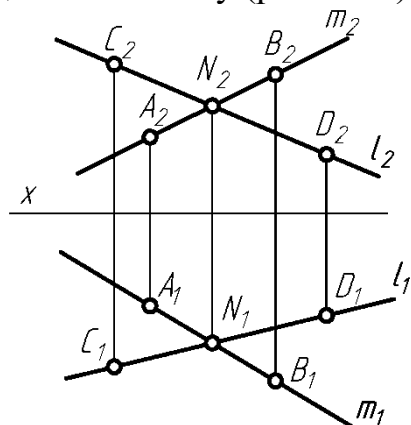


Рис. 2.32

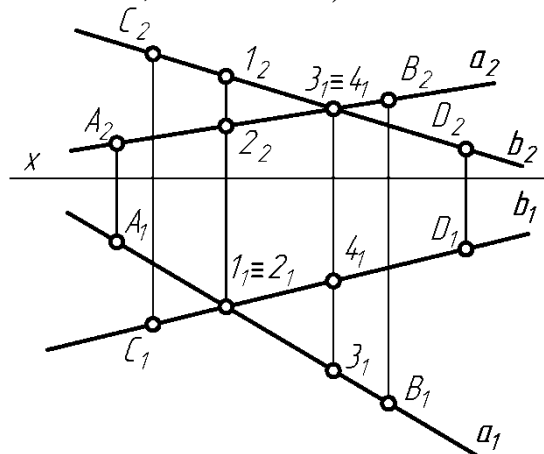


Рис. 2.33

Якщо прямі не паралельні й не перетинаються, то їх називають мимобіжними. Одноименні проекції мимобіжних прямих перетинаються, але проекції точок перетину не лежать на відповідних лініях проекційного зв'язку (рис. 2.33) ( $a \not\equiv b$ ).

**Завдання 2.6.** Через точку  $C$ , яка не належить відрізку  $[AB]$ , провести: а) пряму  $l$ , паралельну  $[AB]$  ( $l \parallel AB$ ); б) пряму  $m$ , що перетинає  $[AB]$  в точці  $D$  ( $m \cap AB = D$ ); в) пряму  $n$ , мимобіжну до  $[AB]$  ( $n \underline{\circ} AB$ ) (рис. 2.34).

**Розв'язування.** Прямі паралельні, якщо їхні однойменні проекції паралельні. Отже, через  $C_2$  будують  $l_2$  паралельно до  $A_2B_2$  ( $l_2 \parallel A_2B_2$ ), через  $C_1$  будують  $l_1$  паралельно до  $A_1B_1$  ( $l_1 \parallel A_1B_1$ ).

Прямі перетинаються в точці  $D$ , якщо їхні однойменні проекції перетинаються в однойменних проекціях точки  $D$ . Отже, на відрізку  $[AB]$  довільно вибирають точку  $D$  ( $D_1 \in A_1B_1$ ,  $D_2 \in A_2B_2$ ), через  $C_2$  і  $D_2$  будують  $m_2$ , через  $C_1$  і  $D_1$  будують  $m_1$ .

Однойменні проекції мимобіжних прямих можуть перетинатися, але проекції їх точок перетину не лежать на відповідних лініях проекційного зв'язку. Отже, через  $C_2$  будують довільну пряму  $n_2$ , яка не збігається з попередньо побудованими прямими  $m_2$  і  $l_2$ . Через  $C_1$  проводять довільну пряму  $n_1$ , точка перетину якої з  $A_1B_1$  не лежить на вертикальній лінії проекційного зв'язку з точкою перетину  $n_2$  і  $A_2B_2$ .

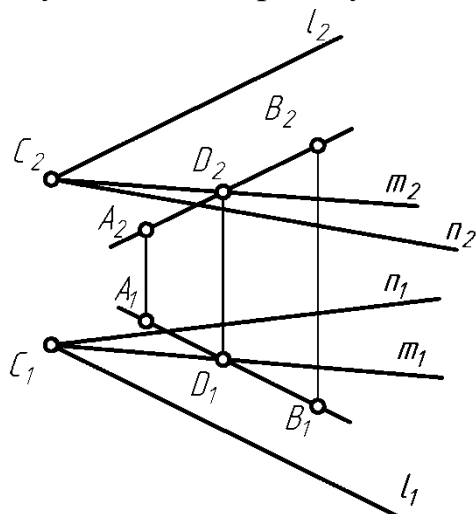


Рис. 2.34

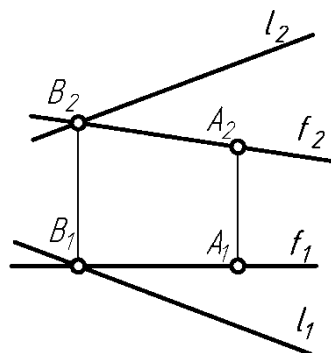


Рис. 2.35

**Завдання 2.7.** Через точку  $A$  провести фронтальну пряму  $f$ , яка б перетинала пряму  $l$  (рис. 2.35).

**Розв'язування.** Горизонтальна проекція фронтальної прямої ( $f_1$ ) завжди паралельна осі  $x$  ( $f_1 \parallel x$ ). Отже, через  $A_1$  проводять пряму, паралельну осі  $x$  до перетину з горизонтальною проекцією прямої ( $l_1$ ) і отримують  $B_1$  ( $f_1 \cap l_1 = B_1$ ). Через  $B_1$  проводять вертикальну лінію проекційного зв'язку до перетину з фронтальною проекцією прямої ( $l_2$ ), отримують фронтальну проекцію точки перетину прямої  $l$  ( $l_2$ ) з фронтальною проекцією фронтальної прямої ( $f_2$ ), ( $B_2 = f_2 \cap l_2$ ), сполучають  $B_2$  з  $A_2$  й отримують  $f_2$ .

## Розділ 3

### Проекціювання площин

#### 3.1. Способи зображення площин на кресленні

Площину уявляють як нескінчену множину положень прямої лінії, яка переміщається у просторі паралельно самій собі вздовж іншої прямої лінії. Такі лінії називають твірною і напрямною.

Площини можна задавати трьома точками, які не лежать на одній прямій (трикутником); прямою і точкою, яка не лежить на даній прямій; двома прямими, які перетинаються; двома паралельними прямими.

На кресленнях площини задають проекціями трьох точок, які не лежать на одній прямій  $\alpha(A, B, C)$  (рис. 3.1); проекціями прямої і точки, яка не лежить на даній прямій;  $\beta(A \notin l)$  (рис. 3.2); проекціями двох прямих, які перетинаються  $\Omega(c \cap d)$  (рис. 3.3); проекціями двох паралельних прямих  $\Delta(m \parallel n)$  (рис. 3.4).

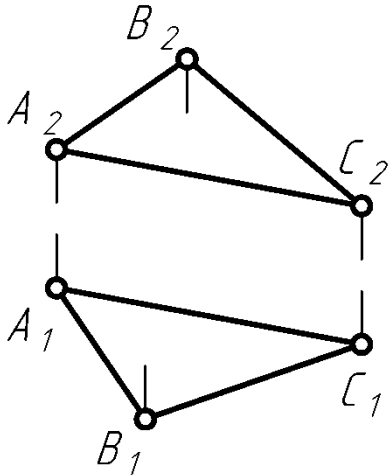


Рис. 3.1

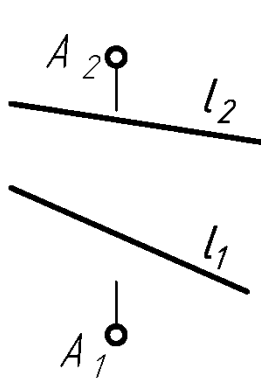


Рис. 3.2

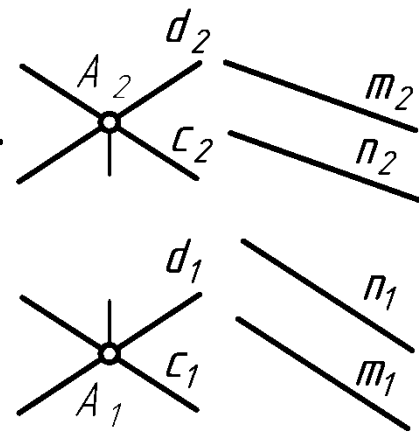


Рис. 3.3

Рис. 3.4

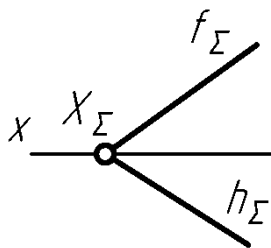


Рис. 3.5

Площини на кресленні можна задавати слідами  $\Sigma(h_\Sigma, f_\Sigma)$  (рис. 3.5).

Слід площини – це пряма лінія, по якій дана площина перетинає площину проекцій.  $h_\Sigma$  – горизонтальний слід площини  $\Sigma$  – лінія перетину площин  $\Sigma$  і  $\Pi_1$  ( $h_\Sigma = \Sigma \cap \Pi_1$ ),  $f_\Sigma$  – фронтальний слід площини  $\Sigma$  – лінія перетину площин  $\Sigma$  і  $\Pi_2$  ( $f_\Sigma = \Sigma \cap \Pi_2$ ),  $p_\Sigma$  – профільний слід площини  $\Sigma$  – лінія перетину площин  $\Sigma$  і  $\Pi_3$  ( $p_\Sigma = \Sigma \cap \Pi_3$ ).

Під час задавання площин завжди можна перейти від одного способу їх задавання до іншого.

#### 3.2. Проекціювання площини загального положення

В інженерній графіці площини розділяють на площини загального й особливого (окремого) положення. Площина загального положення не па-

паралельна і не перпендикулярна жодній із площин проєкцій. Площина особливого (окремого) положення паралельна або перпендикулярна до однієї з площин проєкцій.

На рис. 3.6 зображена площина загального положення. Сліди площини загального положення ніколи не паралельні до осей проєкцій. Кожен слід площини загального положення перетинає дві відповідні осі проєкцій. Два сліди однієї площини перетинають вісь проєкцій у спільній точці, яку називають точкою збігу слідів. Сліди площини завжди лежать в одній з площин проєкцій, отже є прямими особливого положення. В результаті проєкціювання слідів площини на площини проєкцій отримують (рис. 3.7):  $h_{\Sigma 1}$  – горизонтальну проєкцію горизонтального сліду;  $h_{\Sigma 2}$  – фронтальну проєкцію горизонтального сліду;  $h_{\Sigma 3}$  – профільну проєкцію горизонтального сліду;  $f_{\Sigma 1}$  – горизонтальну проєкцію фронтального сліду;  $f_{\Sigma 2}$  – фронтальну проєкцію фронтального сліду;  $f_{\Sigma 3}$  – профільну проєкцію фронтального сліду;  $p_{\Sigma 1}$  – горизонтальну проєкцію профільного сліду;  $p_{\Sigma 2}$  – фронтальну проєкцію профільного сліду;  $p_{\Sigma 3}$  – профільну проєкцію профільного сліду. Оскільки сліди площини лежать у площинах проєкцій, то дві з трьох проєкцій сліду завжди лежать на відповідних осях проєкцій. Так  $h_{\Sigma 2}$  і  $f_{\Sigma 1}$  лежать на осі  $x$  ( $h_{\Sigma 2} \equiv f_{\Sigma 1} \equiv x$ );  $h_{\Sigma 3}$  і  $p_{\Sigma 1}$  лежать на осі  $y$  ( $h_{\Sigma 3} \equiv p_{\Sigma 1} \equiv y$ );  $f_{\Sigma 3}$  і  $p_{\Sigma 2}$  лежать на осі  $z$  ( $f_{\Sigma 3} \equiv p_{\Sigma 2} \equiv z$ ).

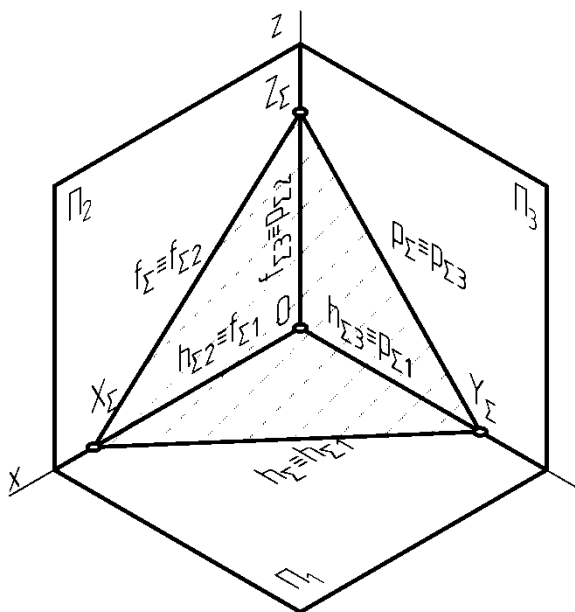


Рис. 3.6

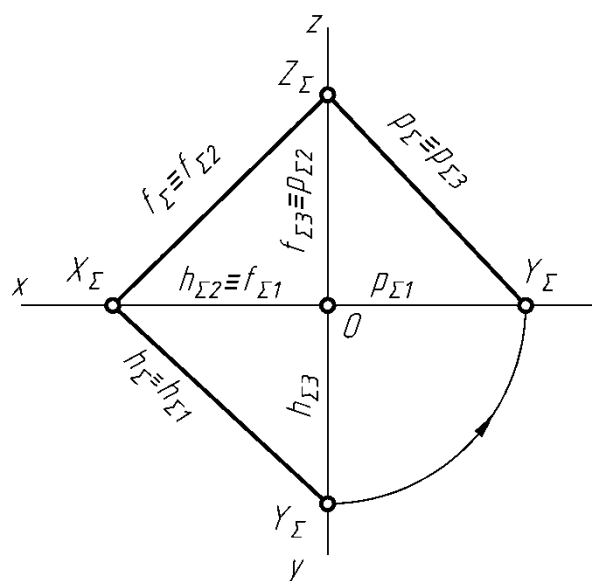


Рис. 3.7

### 3.3. Побудова слідів площини на площинах проєкцій

Для побудови слідів площини достатньо в заданій площині виділити дві прямі, побудувати проєкції їх слідів і отримані однойменні проєкції слідів прямих сполучити прямими лініями.

Нехай площина задана двома прямими, які перетинаються  $a(a \cap b)$  (рис. 3.8). Для побудови доцільно використати прямі, якими задана площина  $a$ . Будують сліди прямої  $a$ : продовжують  $a_2$  до перетину з  $x$ , отримують  $H_2$  ( $a_2 \cap x = H_2$ ), через  $H_2$  проводять вертикальну лінію проєкційного зв'язку до

перетину з  $a_1$ , отримують  $H_1 \equiv H$ , продовжують  $a_1$  до перетину з  $x$ , отримують  $F_1$  ( $a_1 \cap x = F_1$ ), через  $F_1$  проводять вертикальну лінію проекційного зв'язку до перетину з  $a_2$ , отримують  $F_2 \equiv F$ . Будують сліди прямої  $b$ : продовжують  $b_2$  до перетину з  $x$ , отримують  $H_2^1$  ( $b_2 \cap x = H_2^1$ ), через  $H_2^1$  проводять вертикальну лінію проекційного зв'язку до перетину з  $b_1$ , отримують  $H_1^1 \equiv H^1$ , продовжують  $b_1$  до перетину з  $x$ , отримують  $F_1^1$  ( $b_1 \cap x = F_1^1$ ), через  $F_1^1$  проводять вертикальну лінію проекційного зв'язку до перетину з  $b_2$ , отримують  $F_2^1 \equiv F^1$ . Через  $H_1$  і  $H_1^1$  проводять  $h_\alpha$  – горизонтальний слід площини  $\alpha$ , через  $F_2$  і  $F_2^1$  проводять  $f_\alpha$  – фронтальний слід площини  $\alpha$ .

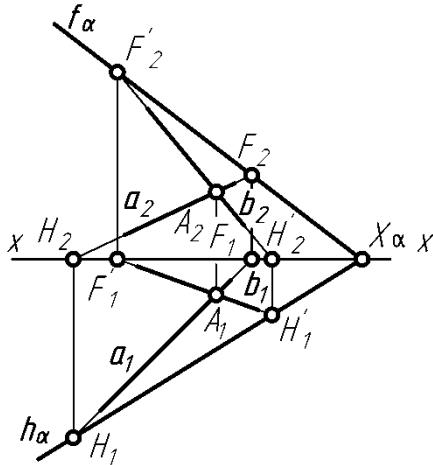


Рис. 3.8

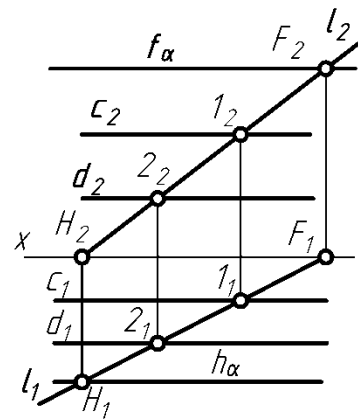


Рис. 3.9

**Завдання 3.1.** Побудувати сліди площини  $\beta(c//d)$  (рис. 3.9).

**Розв'язування.** Проекції прямих, які задають площину  $\beta$  паралельні до  $x$ , отже це профільно-проекціюючі прямі. Таким чином площина  $\beta$  перпендикулярна до  $\Pi_3$ . Для побудови слідів такої площини необхідно побудувати її профільну проекцію, або побудувати проекції додаткової прямої, яка б належала заданій площині і була нахилена до  $\Pi_1$  і  $\Pi_2$ . Перший шлях розв'язку технічно складніший, тому використовують побудову проекцій додаткової прямої  $l(l_1, l_2)$ . Через  $c_2$  і  $d_2$  довільно проводять  $l_2$ , нахилену до  $x$ , отримують точки  $1_2$  ( $l_2 \cap c_2 = 1_2$ ) і  $2_2$  ( $l_2 \cap d_2 = 2_2$ ), прямим проекціюванням (проводячи вертикальні лінії проекційного зв'язку) отримують  $1_1$  на  $c_1$  і  $2_1$  на  $d_1$  через  $1_1$  і  $2_1$  проводять  $l_1$ . Горизонтальний і фронтальний сліди площини, перпендикулярної до  $\Pi_3$ , паралельні осі  $x$  ( $h_\beta // f_\beta // x$ ) і проходять через сліди прямої  $l$ . Отже будують сліди додаткової прямої  $l$ : продовжують  $l_2$  до перетину з  $x$  і отримують  $H_2$  ( $l_2 \cap x = H_2$ ), прямим проекціюванням на  $l_1$  отримують  $H_1$ , продовжують  $l_1$  до перетину з  $x$  і отримують  $F_1$  ( $l_1 \cap x = F_1$ ), прямим проекціюванням на  $l_2$  отримують  $F_2$ . Через  $H_1$  проводять  $h_\beta // x$ , через  $F_2$  проводять  $f_\beta // x$ .



### 3.4. Проекціювання площин, які займають особливе положення відносно площин проекцій

Площини особливого (окремого) положення поділяють на проєкціюючі площини і площини рівня. Площини, перпендикулярні до однієї з площин проєкцій, називають проєкціюючими і носять назву площини, до якої вони перпендикулярні.

Площину, перпендикулярну до  $\Pi_1$ , називають горизонтально проєкціюючою (рис. 3.10). фронтальний і профільний сліди такої площини паралельні осі  $z$  ( $f_\alpha/z \parallel p_\alpha$ ). Кут нахилу горизонтального сліду  $h_\alpha$  до осі  $x$  дорівнює куту нахилу горизонтально-проєкціюючої площини  $\alpha$  до  $\Pi_2$  (рис. 3.11). Плоскі фігури, які лежать у горизонтально-проєкціюючій площині проєкціюються на її горизонтальний слід. На безосному епюрі горизонтально-проєкціюючу площину задають горизонтальним слідом (рис. 3.12).

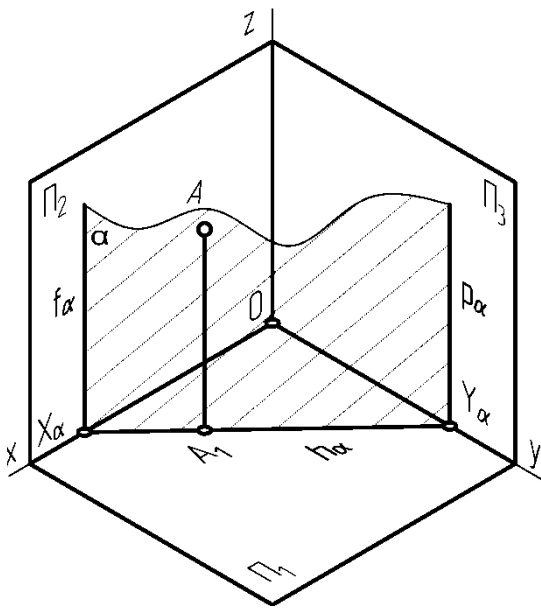


Рис. 3.10

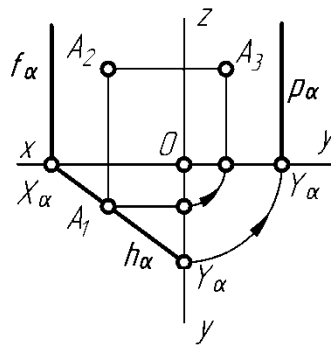


Рис. 3.11

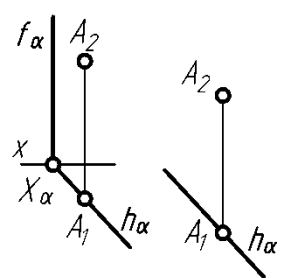


Рис. 3.12

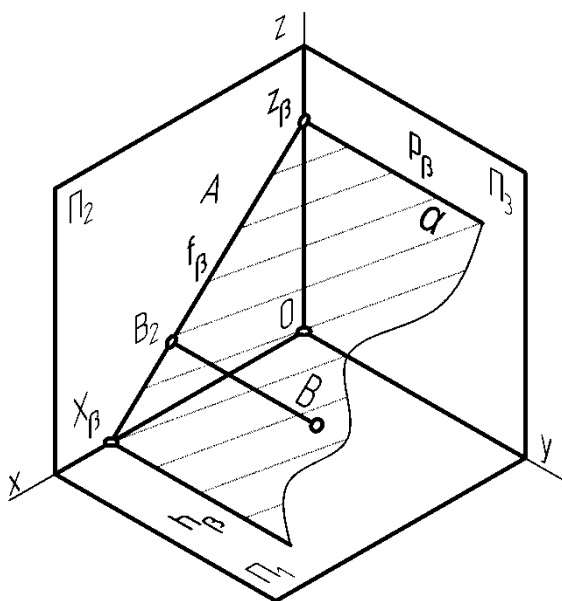


Рис. 3.13

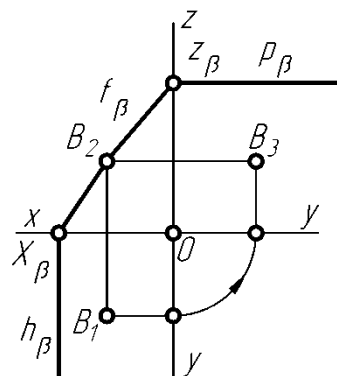


Рис. 3.14

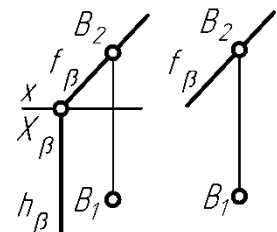


Рис. 3.15

Площину, перпендикулярну до  $\Pi_2$ , називають фронтально проєкціуючою (рис. 3.13). Горизонтальний і профільний сліди такої площини паралельні до осі  $y$  ( $h_\beta // y // p_\beta$ ). Кут нахилу фронтального сліду  $f_\beta$  до осі  $x$  дорівнює куту нахилу фронтально проєкціуючої площини до  $\Pi_1$  (рис. 3.14). Відповідно, кут нахилу фронтального сліду  $f_\beta$  до осі  $z$  дорівнює куту нахилу фронтально проєкціуючої площини до  $\Pi_3$ . Плоскі фігури, які лежать у фронтально проєкціуючій площині проєкціюються на її фронтальний слід. На безосному епюрі фронтально проєкціуючу площину задають фронтальним слідом (рис. 3.15).

Площину, перпендикулярну до  $\Pi_3$ , називають профільно-проєкціуючою (рис. 3.16). Горизонтальний і фронтальний сліди такої площини паралельні осі  $x$  ( $h_\gamma // x // f_\gamma$ ). Кут нахилу профільного сліду  $p_\gamma$  до осі  $y$  дорівнює куту нахилу профільно-проєкціуючої площини до  $\Pi_1$  (рис. 3.17). Відповідно, кут нахилу профільного сліду  $p_\gamma$  до осі  $z$  дорівнює куту нахилу профільно-проєкціуючої площини до  $\Pi_2$ . Плоскі фігури, які лежать у профільно-проєкціуючій площині, проєкціюються на її профільний слід.

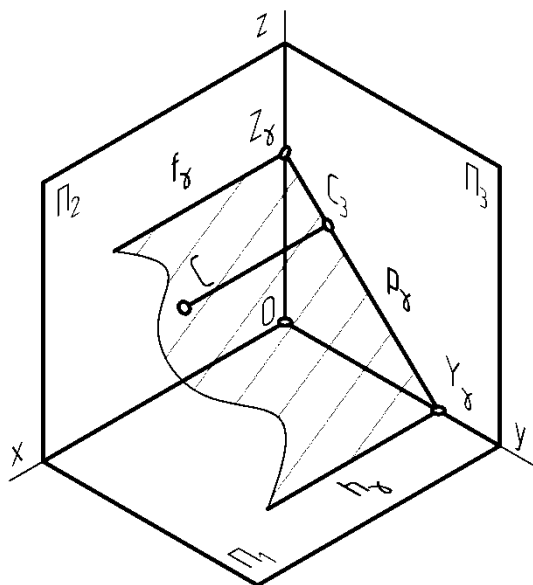


Рис. 3.16

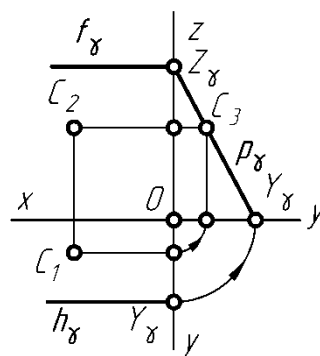


Рис. 3.17

Площини, паралельні до однієї з площин проєкцій, називають площинами рівня і носять назву площин, до яких вони паралельні.

Площину, паралельну до  $\Pi_1$ , називають горизонтальною (рис. 3.18). Фронтальний і профільний сліди такої площини перпендикулярні осі  $z$  ( $f_\alpha \perp z$ ,  $p_\alpha \perp z$ ) (рис. 3.19). Плоскі фігури, які лежать у горизонтальній площині проєкціюються на  $\Pi_1$  у натуральну величину.

Площину паралельну, до  $\Pi_2$ , називають фронтальною (рис. 3.20). Горизонтальний і профільний сліди такої площини перпендикулярні осі  $y$  ( $h_\beta \perp y$ ,  $p_\beta \perp y$ ) (рис. 3.21). Плоскі фігури, які лежать у фронтальній площині, проєкціюються на  $\Pi_2$  у натуральну величину.

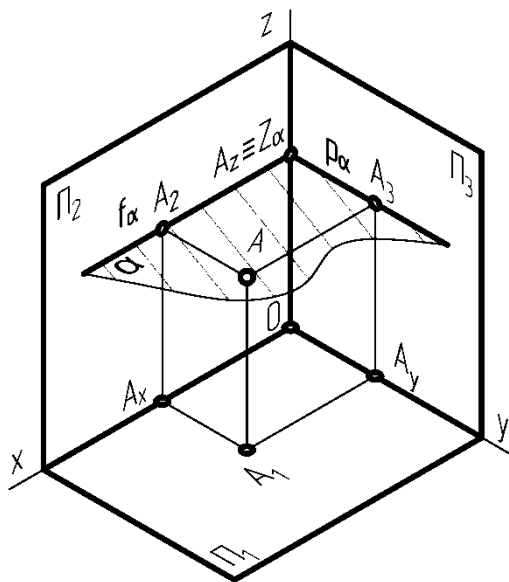


Рис. 3.18

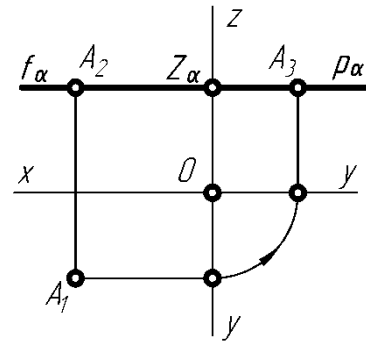


Рис. 3.19

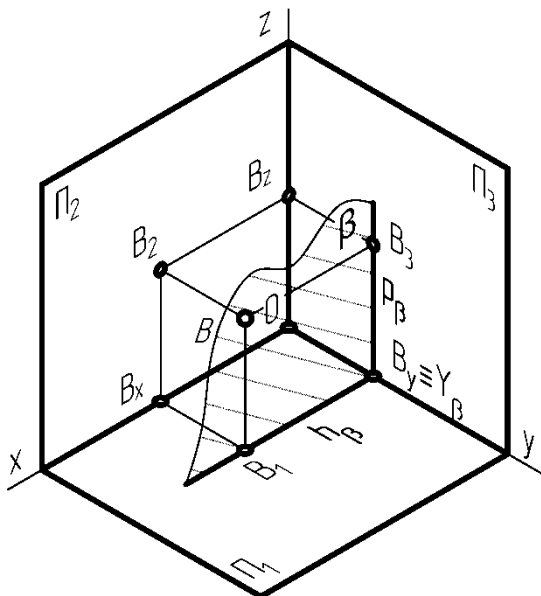


Рис. 3.20

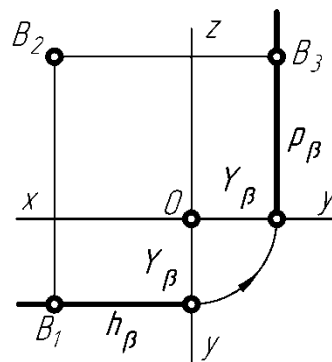


Рис. 3.21

Площину, паралельну до  $\Pi_3$ , називають профільною (рис. 3.22). Горизонтальний і фронтальний сліди такої площини перпендикулярні осі  $x(h_\gamma \perp x, f_\gamma \perp x)$  (рис. 3.23). Плоскі фігури, які лежать у профільній площині проєкціюються на  $\Pi_3$  у натуральну величину.

В інженерній графіці до окремої групи площин відносять осьові й бісекторні площини. Осьовими називають площини, які проходять через одну з осей проєкцій. Бісекторними називають осьові площини, які ділять двогранні кути, утворені площинами проєкцій навпіл.

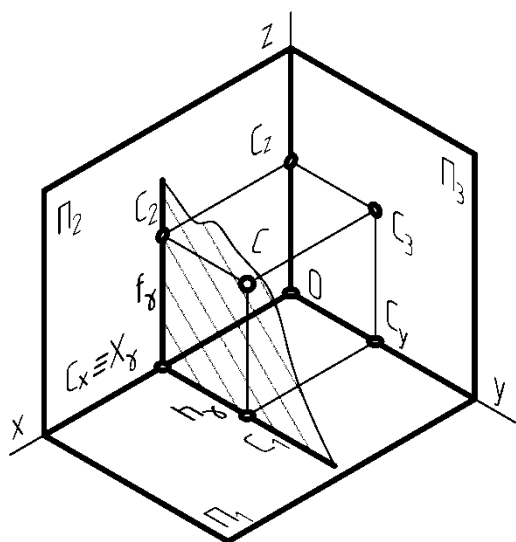


Рис. 3.22

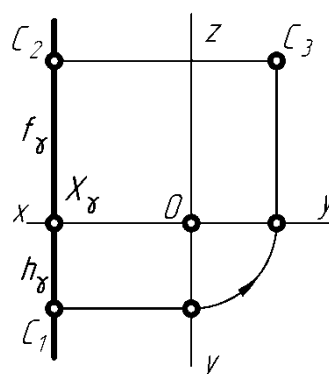


Рис. 3.23

### 3.5. Проекціювання прямих і точок, які належать площині

З геометрії відомі теореми про пряму, яка належить площині:

1. Пряма належить площині, якщо вона проходить через точку, яка розміщена в даній площині й паралельна до прямої, яка знаходиться в цій площині або паралельна до неї.

2. Пряма належить площині, якщо вона проходить через дві точки, які розміщені в даній площині.

Щоб побудувати пряму  $l(l_1, l_2)$ , яка належить (інцидентна) площині  $\alpha(a \cap b)$  (рис. 3.24) на проекціях прямих, які задають площину, будують проєкції точок  $1(1_1, 1_2)$  і  $2(2_1, 2_2)$ , через  $1_1$  і  $2_1$  будують  $l_1$ , через  $1_2$  і  $2_2$  будують  $l_2$ . Пряма  $l$  розташована у площині  $\alpha(l \in \alpha)$ , оскільки вона перетинає прямі, які задають площину в точках  $1(l \cap a)$  і  $2(l \cap b)$ .

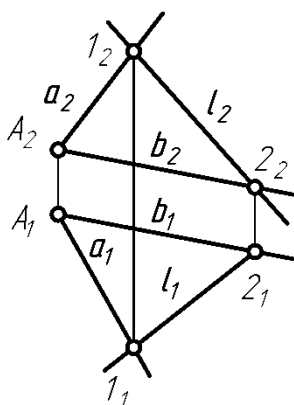


Рис. 3.24

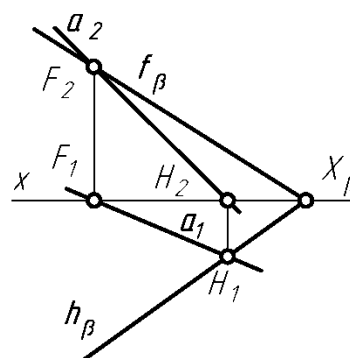


Рис. 3.25

Аналогічно будують проєкції прямої, яка належить площині  $\beta$ , заданій слідами  $\beta(h_\beta, f_\beta)$  (рис. 3.25). На слідах площини вибирають дві довільні точки  $H \in h_\beta$ ,  $F \in f_\beta$ . Відомо, якщо  $F_2 \in f_\beta$ , тоді  $F_1 \in x$ , оскільки  $f_{\beta 1} \equiv x$ , якщо  $H_1 \in h_\beta$ ,  $H_2 \in x$ , оскільки  $h_{\beta 2} \equiv x$ . Отже, прямим проєкціюванням на осі  $x$  отримують  $F_1$  і  $H_2$ , через  $H_1$  і  $F_1$  проводять  $a_1$ , через  $H_2$  і  $F_2$  проводять  $a_2$ .

Точка належить площині, коли вона лежить на прямій, яка належить площині. Отже, щоб побудувати проекції точки  $D$ , яка належить площині  $\tau(A, B, C)$  (рис. 3.26), будують довільну проекцію точки ( $D_1$ ). Через  $D_1$  проводять проекцію прямої  $l_1$ , яка належить площині ( $l \subset \tau$ ), оскільки вона проходить через одну з точок, які задають площину ( $A \in l$ ) і перетинає  $BC$  у точці  $M(l_1 \cap C_1 B_1 = M_1)$ . Прямим проєкціюванням на  $C_2 B_2$  будують  $M_2$ , через  $A_2$  і  $M_2$  будують  $l_2$  і прямим проєкціюванням на  $l_2$  будують  $D_2(D \in l, l \subset \tau \Rightarrow D \in \tau)$ .

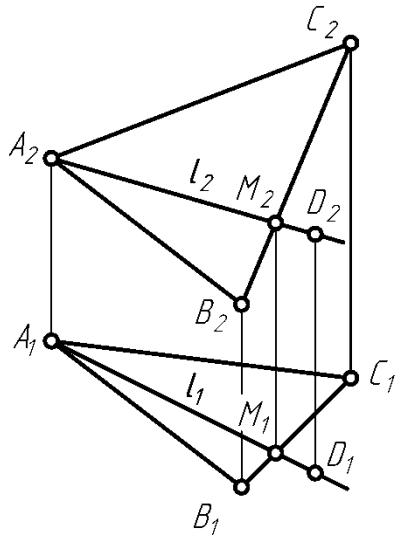


Рис. 3.26

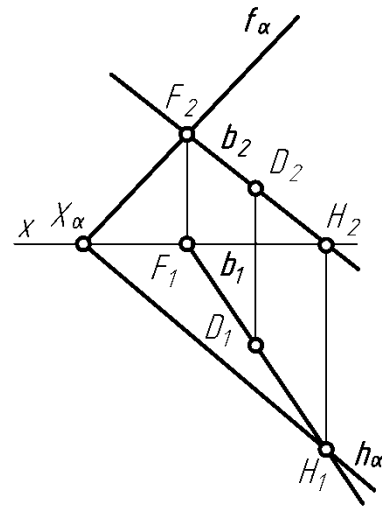


Рис. 3.27

**Завдання 3.2.** Побудувати горизонтальну проекцію точки  $D$ , яка належить площині заданій слідами  $\alpha(h_\alpha, f_\alpha)$  (рис. 3.27).

**Розв'язування.** Через  $D_2$  проводять фронтальну проекцію прямої  $b$ , яка належить  $\alpha(b_2 \cap f_\alpha = F_2, b_2 \cap x = H_2)$ , прямим проєкціюванням  $F_2$  на  $x$  будують  $F_1$ , прямим проєкціюванням  $H_2$  на  $h_\alpha$  будують  $H_1$ , через  $F_1$  і  $H_1$  проводять  $b_1$ , прямим проєкціюванням  $D_2$  на  $b_1$  отримують  $D_1$ .

### 3.6. Побудова проєкцій плоских фігур

Геометричні фігури, усі точки яких лежать в одній площині, називають плоскими. Проекціювання плоских фігур зводять до побудови проєкцій точок і ліній, які розташовані в одній площині. Під час такого проєкціювання необхідно пам'ятати: плоска фігура проєкціюється в дійсну величину, якщо вона паралельна до однієї з площин проєкцій; плоска фігура проєкціюється у пряму лінію, якщо вона перпендикулярна до однієї з площин проєкцій; проєкції плоских фігур, які займають загальне положення відносно площин проєкцій завжди подібні до оригіналів.

Нехай задано площину прямими, які перетинаються  $\alpha(a \cap b)$ , і фронтальну проекцію трикутника ( $A_2 B_2 C_2$ ), який належить площині  $\alpha$  (рис. 3.28). Необхідно побудувати горизонтальну проекцію трикутника. Будують фронтальні проєкції прямих  $k$  і  $l$ , які перетинають сторони трикутника і прямі  $a$  і  $b$  ( $k_2 \cap a_2 = 1_2, k_2 \cap b_2 = 2_2, k_2 \cap A_2 B_2 = 3_2, k_2 \cap A_2 C_2 = 4_2, l_2 \cap b_2 = 5_2, l_2 \cap a_2 = 6_2, l_2 \cap A_2 C_2 = 7_2, B_2 \in l_2$ ), прямим проєкціюванням  $1_2$  на  $a_1$  отримують  $1_1$ , прямим проєкціюванням  $2_2$  на  $b_1$  отримують  $2_1$ , через  $1_1$  і  $2_1$  проводять  $k_1$ , прямим

проекціюванням  $3_2$  на  $k_1$  отримують  $3_1$ , прямим проекціюванням  $4_2$  на  $k_1$  отримують  $4_1$ , прямим проекціюванням  $5_2$  на  $b_1$  отримують  $5_1$ , прямим проекціюванням  $6_2$  на  $a_1$  отримують  $6_1$ , через  $5_1$  і  $6_1$  проводять  $l_1$ , прямим проекціюванням  $7_2$  на  $l_1$  отримують  $7_1$ , прямим проекціюванням  $B_2$  на  $l_1$  отримують  $B_1$ , через  $4_1$  і  $7_1$  проводять пряму, прямим проекціюванням  $A_2$  на  $4_17_1$  отримують  $A_1$ , прямим проекціюванням  $C_2$  на  $4_17_1$  отримують  $C_1$ , сполучають  $A_1$ ,  $B_1$ , і  $C_1$  і отримують горизонтальну проекцію трикутника ( $A_1B_1C_1$ ).

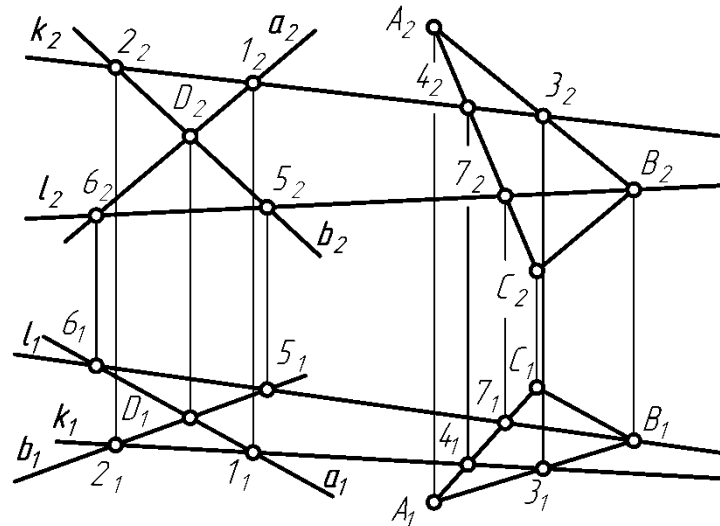


Рис. 3.28

Аналогічно виконують побудову другої проекції плоскої фігури, яка належить площині заданих слідами  $\beta(h_\beta, f_\beta)$  (рис. 3.29).

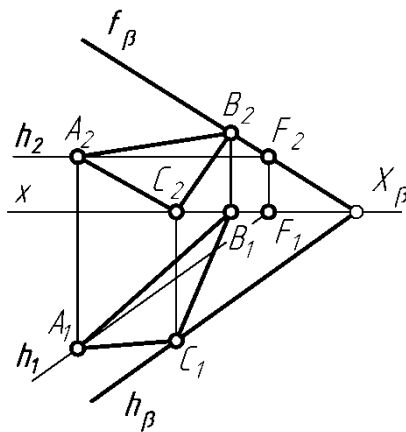


Рис. 3.29

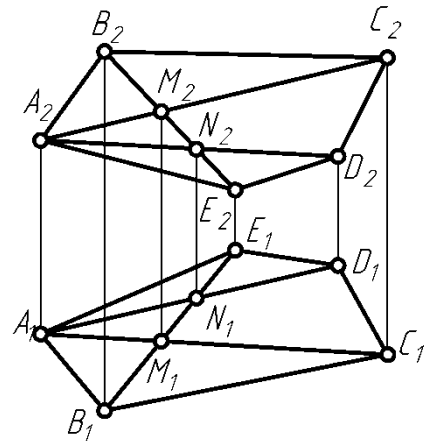


Рис. 3.30

**Завдання 3.3.** Побудувати фронтальну проекцію п'ятикутника, якщо відома його горизонтальна проекція ( $A_1B_1C_1D_1E_1$ ) і фронтальні проекції його трьох точок ( $A_2$ ,  $B_2$ , і  $C_2$ ) (рис. 3.30).

**Розв'язування.** Для побудови приймають, що точки, проекції яких відомі, задають площину, тоді точки, фронтальні проекції яких потрібно побудувати, розміщені у даній площині. Одночасно вказані точки лежать на діагоналях заданого п'ятикутника. Таким чином будують горизонтальні проекції діагоналей  $A_1D_1$ ,  $A_1C_1$ ,  $B_1E_1$  і фронтальну проекцію діагоналі  $A_2C_2$ . У точках перетину діагоналей отримують точки  $M$  і  $N$  ( $B_1E_1 \cap A_1D_1 = N_1$ ,

$B_1E_1 \cap A_1C_1 = M_1$ ), прямим проєкціюванням  $M_1$  на  $A_2C_2$  отримують  $M_2$ , проводять  $B_2M_2$ , прямим проєкціюванням  $E_1$  на  $B_2M_2$  отримують  $E_2$ , будують  $A_2E_2$ , прямим проєкціюванням  $N_1$  на  $B_2E_2$  отримують  $N_2$ , проводять  $A_2N_2$ , прямим проєкціюванням  $D_1$  на  $A_2N_2$  отримують  $D_2$ , сполучають  $A_2$ ,  $B_2$ ,  $C_2$ ,  $D_2$  і  $E_2$  і отримують фронтальну проєкцію п'ятикутника  $ABCDE$ .

### 3.7. Проекціювання головних ліній площини

Прямі, які належать площині й паралельні до однієї з площин проєкцій, називають головними лініями площини. До головних ліній площини відносять також прямі, перпендикулярні до прямих, які паралельні до однієї з площин проєкцій.

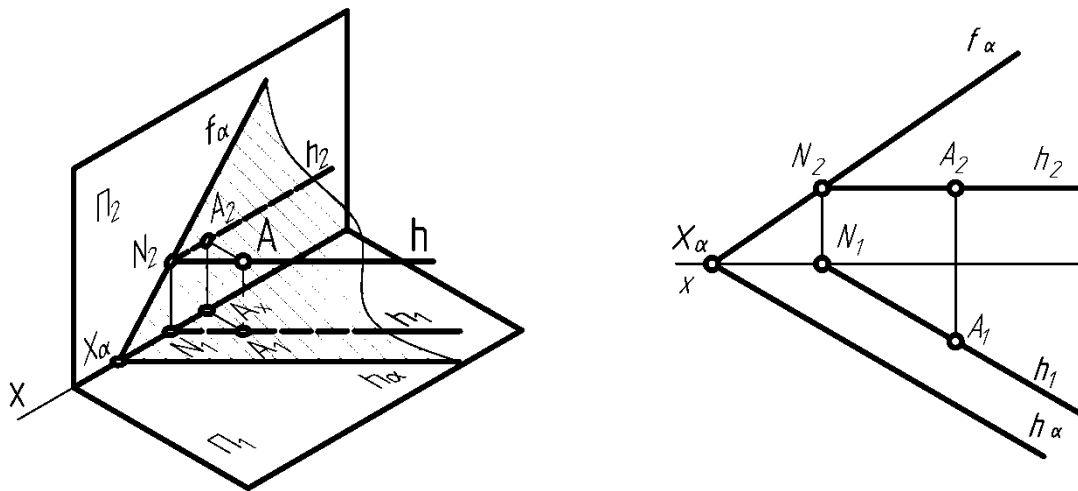


Рис. 3.31

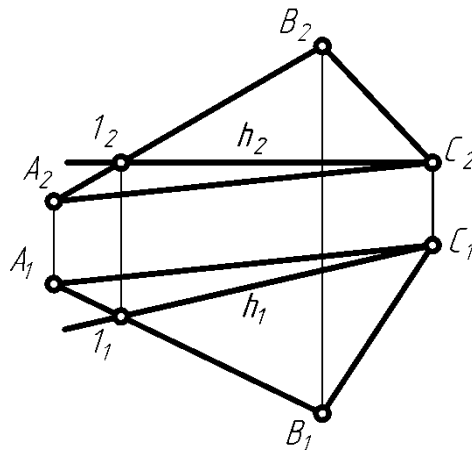


Рис. 3.32

Пряму, яка належить площині й паралельна до  $\Pi_1$ , називають горизонталлю (рис. 3.31). Горизонталі однієї площини паралельні між собою. Фронтальна проєкція горизонталі ( $h_2$ ) завжди паралельна осі  $x$  ( $h_2 // x$ ), горизонтальна проєкція горизонталі ( $h_1$ ) паралельна горизонтальному сліду площини ( $h_1 // h_\alpha$ ).

Для побудови проєкцій горизонталі  $h(h_1, h_2)$  у площині  $\alpha(A, B, C)$  проводять  $h_2 // x$ , ( $C_2 \in h_2, A_2B_2 \cap h_2 = I_2$ ), прямим проєкціюванням  $I_2$  на  $A_1B_1$  отримують  $I_1$ , через  $C_1$  і  $I_1$  проводять  $h_1$  (рис. 3.32).

Пряму, яка належить площині й паралельна до  $\Pi_2$ , називають фронталлю (рис. 3.33). Фронталі однієї площини паралельні між собою. Горизонтальна проекція фронталі ( $f_1$ ) завжди паралельна осі  $x$  ( $f_1//x$ ), фронтальна проекція фронталі ( $f_2$ ) паралельна фронтальному сліду площини ( $f_2//f_\beta$ ).

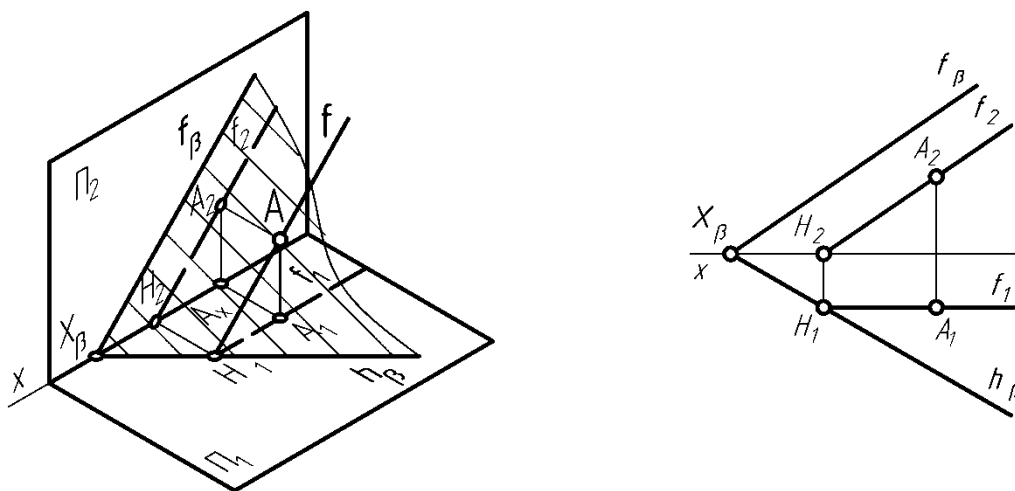


Рис. 3.33

Для побудови проекцій фронталі  $f(f_1, f_2)$  у площині  $\beta(a//b)$  (рис. 3.34) проводять  $f_1//x$ , ( $f_1 \cap a_1 = 1_1$ ,  $f_1 \cap b_1 = 2_1$ ), прямим проекціюванням  $1_1$  на  $a_2$  отримують  $1_2$ , прямим проекціюванням  $2_1$  на  $b_2$  отримують  $2_2$ , через  $1_2$  і  $2_2$  проводять  $f_2$ .

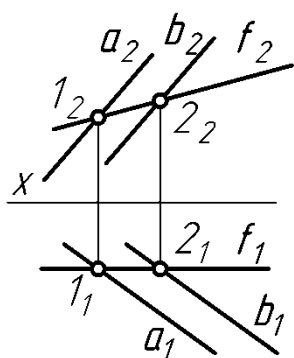


Рис. 3.34

Пряму, яка належить площині і паралельна до  $\Pi_3$ , називають профільною прямою (рис. 3.35). Профільні прямі однієї площини паралельні між собою. Горизонтальна і фронтальна проекції профільної прямої завжди перпендикулярні осі  $x$  ( $p_1 \perp x$ ,  $p_2 \perp x$ ), профільна проекція профільної прямої ( $p_3$ ) паралельна профільному сліду площини ( $p_3//p_\tau$ ).

Для побудови проекцій профільної прямої  $p$  ( $p_1, p_2, p_3$ ) у площині  $\tau(A, B, C)$  будують три проекції площини  $\tau$  (рис. 3.36). Через  $A_1 B_1 C_1$  проводять  $p_1 \perp x$  ( $p_1 \cap B_1 C_1 = 1_1$ ,  $p_1 \cap A_1 C_1 = 2_1$ ), прямим проекціюванням  $1_1$  на  $B_2 C_2$  отримують  $1_2$ , прямим проекціюванням  $2_1$  на  $A_2 C_2$  отримують  $2_2$ , через  $1_2$  і  $2_2$  проводять  $p_2 \perp x$ , прямим проекціюванням  $1_2$  на  $B_3 C_3$  отримують  $1_3$ , прямим проекціюванням  $2_2$  на  $A_3 C_3$  отримують  $2_3$ , через  $1_3$  і  $2_3$  проводять  $p_3$ .



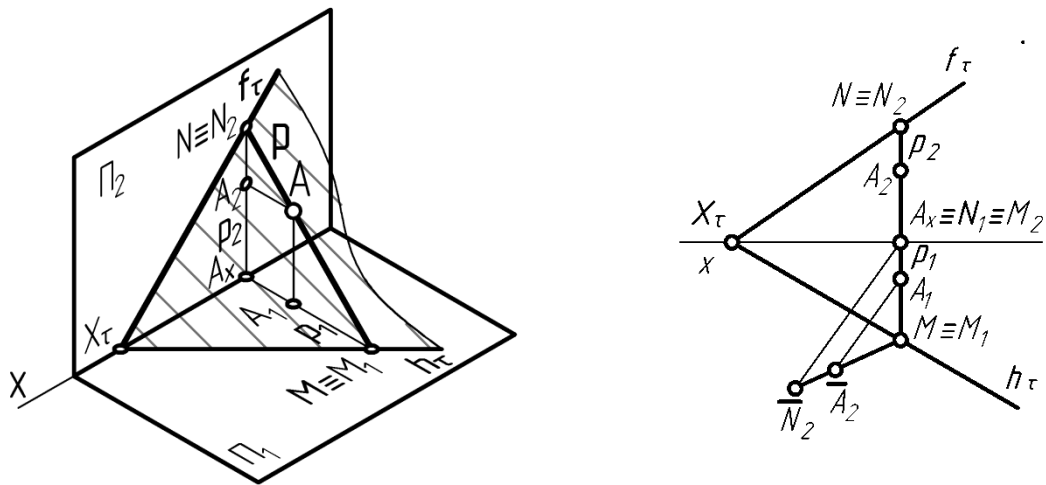


Рис. 3.35

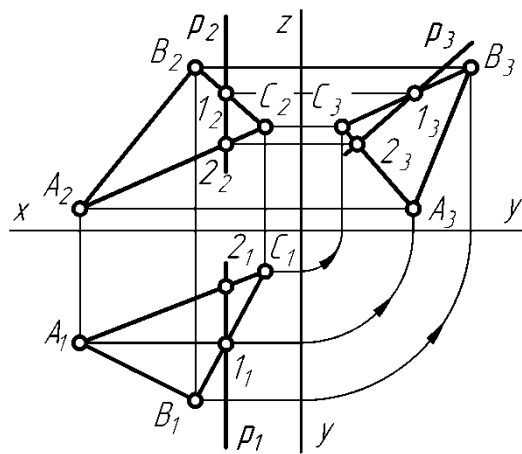


Рис. 3.36

Пряму, яка належить площині і перпендикулярна до її горизонталі, називають лінією найбільшого нахилу до  $\Pi_1$  (лінією скату). Лінії найбіль-

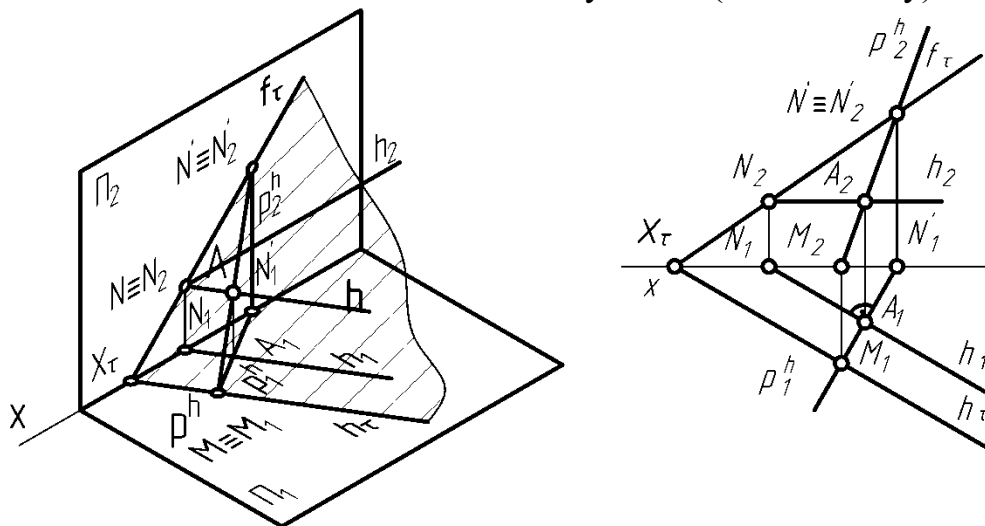


Рис. 3.37

шого нахилу до  $\Pi_1$  однієї площини паралельні між собою. Горизонтальна проекція лінії найбільшого нахилу до  $\Pi_1$  ( $p^h_1$ ) перпендикулярна до горизонтальної проекції горизонталі ( $p^h_1 \perp h_1$ ) (рис. 3.37).

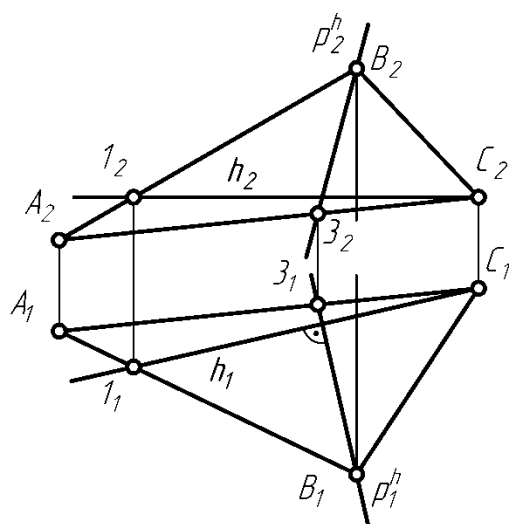


Рис. 3.38

Для побудови проєкцій лінії найбільшого нахилу до  $\Pi_1$  ( $p^h(p^h_1, p^h_2)$ ) в площині  $\alpha(A, B, C)$  будують проєкції горизонталі  $h(h_1, h_2)$ , проводять горизонтальну проєкцію лінії найбільшого нахилу до  $\Pi_1$  ( $p^h_1$ ) перпендикулярно до горизонтальної проєкції горизонталі ( $p^h_1 \perp h_1$ ) (рис. 3.38), ( $B_1 \in p^h_1$ ,  $p^h_1 \cap A_1C_1 = 3_1$ ), прямим проєціюванням  $3_1$  на  $A_2C_2$  отримують  $3_2$ , через  $3_2$  і  $B_2$  проводять  $p^h_2$ .

Пряму, яка належить площині й перпендикулярна до її фронталі, називають лінією найбільшого нахилу до  $\Pi_2$ . Лінії найбільшого нахилу до  $\Pi_2$  однієї площини паралельні між собою. Фронтальна проєкція лінії найбільшого нахилу до  $\Pi_2$  ( $p^f_2$ ) перпендикулярна до фронтальної проєкції фронталі ( $p^f_2 \perp f_2$ ) (рис. 3.39).

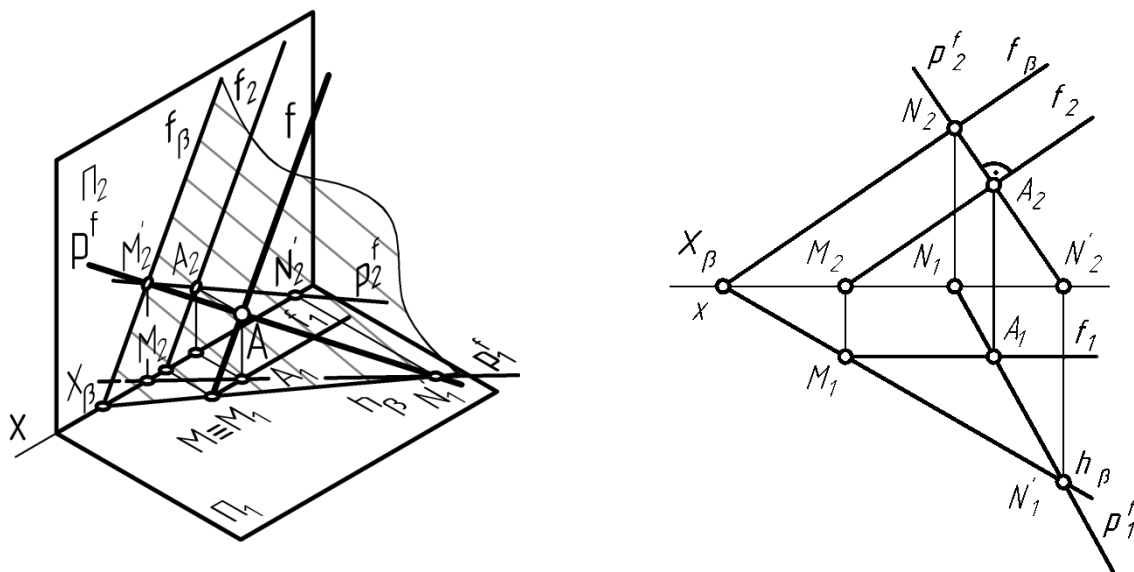


Рис. 3.39

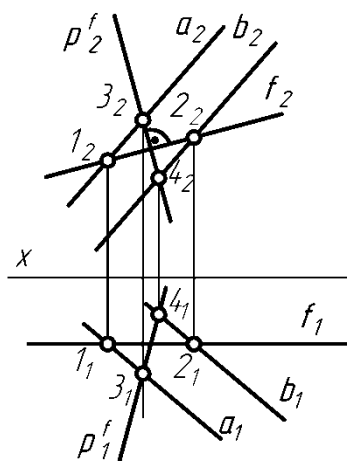


Рис. 3.40

Для побудови проєкцій лінії найбільшого нахилу до  $\Pi_2$   $p^f(p^f_1, p^f_2)$  в площині  $\beta(a//b)$  будують проєкції фронталі  $f(f_1, f_2)$ , проводять фронтальну проєкцію лінії найбільшого нахилу до  $\Pi_2$  ( $p^f_2$ ) перпендикулярну до фронтальної проєкції фронталі ( $p^f_2 \perp f_2$ ) (рис.3.40), ( $p^f_2 \cap a_2 = 3_2$ ,  $p^f_2 \cap b_2 = 4_2$ ), прямим проєкціюванням  $3_2$  на  $a_1$  отримують  $3_1$ , прямим проєкціюванням  $4_2$  на  $b_1$  отримують  $4_1$ , через  $3_1$  і  $4_1$  проводять  $p^f_1$ .

Пряму, яка належить площині й перпендикулярна до її профільної прямої, називають лінією найбільшого нахилу до  $\Pi_3$ . Лінії найбільшого нахилу до  $\Pi_3$  однієї площини паралельні між собою. Профільна проєкція лінії найбільшого нахилу до  $\Pi_3$  ( $p^p_3$ ) перпендикулярна до профільної проєкції профільної прямої ( $p^p_3 \perp p_3$ ) (рис. 3.41).

Для побудови проєкцій лінії найбільшого нахилу до  $\Pi_3$   $p^p(p^p_1, p^p_2, p^p_3)$  у площині  $\tau(A, B, C)$  будують проєкції профільної прямої  $p(p_1, p_2, p_3)$ , (рис. 3.42), проводять профільну проєкцію лінії найбільшого нахилу до  $\Pi_3$  ( $p^p_3$ ), перпендикулярну до профільної проєкції профільної прямої ( $p^p_3 \perp p_3$ ), ( $A_3 \in p^p_3$ ,  $p^p_3 \cap B_3C_3 = 3_3$ ), прямим проєкціюванням  $3_3$  на  $B_2C_2$  отримують  $3_2$ , прямим проєкціюванням  $3_2$  на  $B_1C_1$  отримують  $3_1$ , через  $3_2$  і  $A_2$  проводять  $p^p_2$ , через  $3_1$  і  $A_1$  проводять  $p^p_1$ .

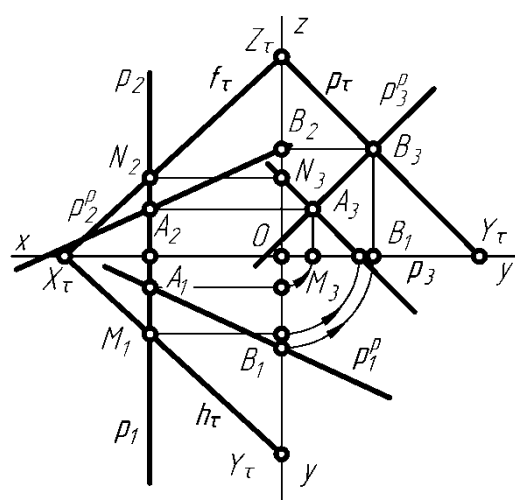
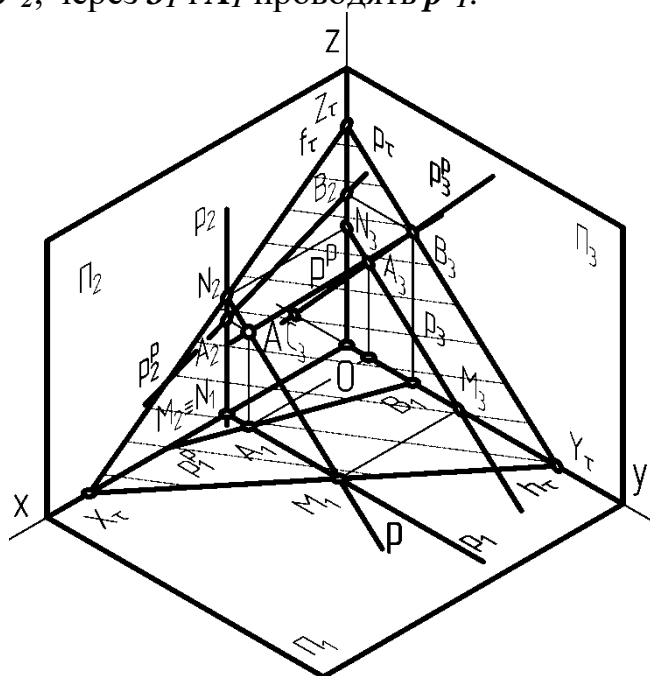


Рис. 3.41

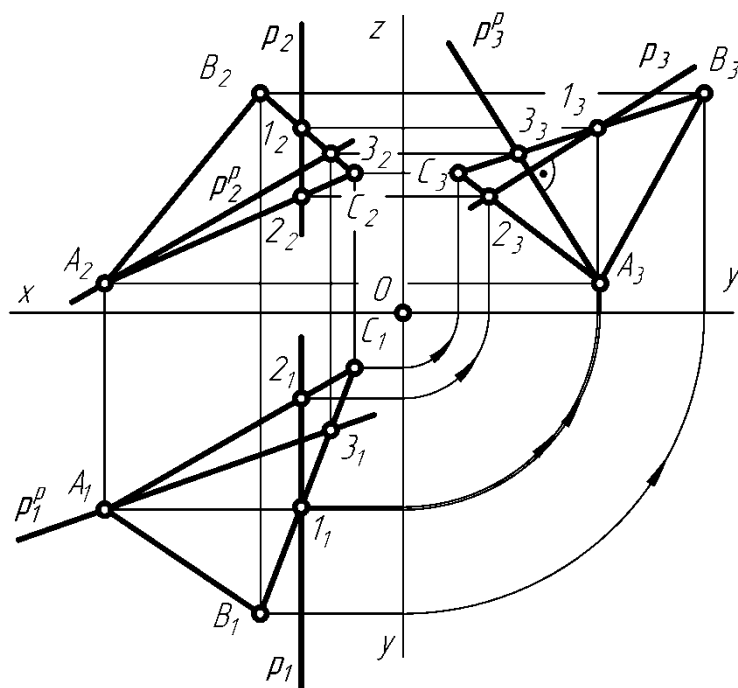


Рис. 3.42

Лінії найбільшого нахилу можна використовувати для визначення положення площини або для визначення кутів нахилу площини для площин проекцій.

Нехай площина  $\alpha$  задана слідами  $(h_\alpha, f_\alpha)$  (рис. 3.43). Для визначення кута нахилу площини до  $\Pi_1$  будують проекції лінії найбільшого нахилу до  $\Pi_1$   $MN(M_1N_1, M_2N_2)$ . Як сказано вище побудову починають з горизонтальної проекції. На  $h_\alpha$  вибирають  $M_1(M_1 \in h_\alpha)$ , через  $M_1$  проводять горизонтальну проекцію лінії найбільшого нахилу до  $\Pi_1$  як перпендикуляр до  $h_\alpha$  і продовжують до перетину з віссю  $x$  у точці  $N_1(M_1N_1 \perp h_\alpha)$ , прямим проєкціюванням  $M_1$  на вісь  $x$  отримують  $M_2$ , прямим проєкціюванням  $N_1$  на  $f_\alpha$  отримують  $N_2$ , через  $M_2$  і  $N_2$  проводять фронтальну проекцію лінії найбільшого нахилу до  $\Pi_1$ . Кут нахилу площини  $\alpha$  до  $\Pi_1$  визначають з допомогою правила прямокутного трикутника. Так через  $N_1$  проводять промінь, перпендикулярний до  $M_1N_1$ , з  $N_1$  методом засічок на промені відкладають відрізок, що дорівнює величині різниці перевищень точок  $M$  і  $N$  над  $\Pi_1(N_2N_1)$  і отримують точку  $N_0$ , сполучають  $N_0$  і  $M_1$  і отримують кут  $N_1M_1N_0 = \varphi$  – кут нахилу площини  $\alpha$  до  $\Pi_1$ .

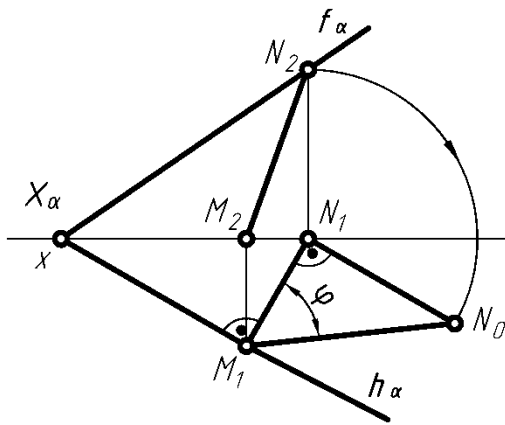


Рис. 3.43

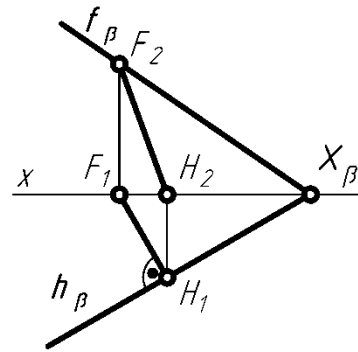


Рис. 3.44

**Завдання 3.4.** Побудувати сліди площини  $\beta(h_\beta, f_\beta)$ , якщо відомі проєкції її лінії найбільшого нахилу до  $\Pi_1(H_1F_1, H_2F_2)$ , (рис. 3.44).

**Розв'язування.** Для виконання побудови переходять від безосного епюра до осного, тобто через  $H_2$  і  $F_1$  проводять вісь  $x$ , через  $H_1$  проводять  $h_\beta$  перпендикулярно до  $H_1F_1$  ( $h_\beta \perp H_1F_1$ ) і продовжують його до перетину з віссю  $x$  у точці збігу слівів  $X_\beta$  ( $h_\beta \cap x = X_\beta$ ), через  $X_\beta$  і  $F_2$  проводять  $f_\beta$ .

### 3.8. Перетин довільних прямих та площин площинами окремого положення

Пряма і площина або дві площини можуть перетинатися, бути паралельними або збігатися. Якщо пряма і площина перетинаються, то існує у просторі точка, спільна для прямої і площини. Таку точку називають точкою перетину прямої з площиною, а побудову проєкцій точки перетину вважають важливою задачею.

Під час побудови проєкцій точки перетину прямої з проєкціуючою площиною (рис. 3.45) використовують властивість проєкціювання плоских геометричних фігур, які розміщені у проєкціуючій площині. Зокрема такі фігури проєкціюються на характерний слід проєкціуючої площини. Так пряма  $l(l_1, l_2)$  перетинає горизонтально – проєкціуючу площину  $\alpha(h_\alpha, f_\alpha)$  у точці  $K(l \cap \alpha = K)$ , горизонтальна проєкція точки перетину  $K_1$  лежить у точці перетину  $l_1$  і  $h_\alpha$  ( $l_1 \cap h_\alpha = K_1$ ), фронтальну проєкцію точки  $K(K_2)$  знаходять прямим проєкціюванням  $K_1$  на  $l_2$ .

Якщо дві площини перетинаються, то існує у просторі пряма спільна для даних площин. Таку пряму називають лінією перетину двох площин. Щоб побудувати лінію перетину двох площин, необхідно побудувати дві точки, які розміщені на даній лінії.

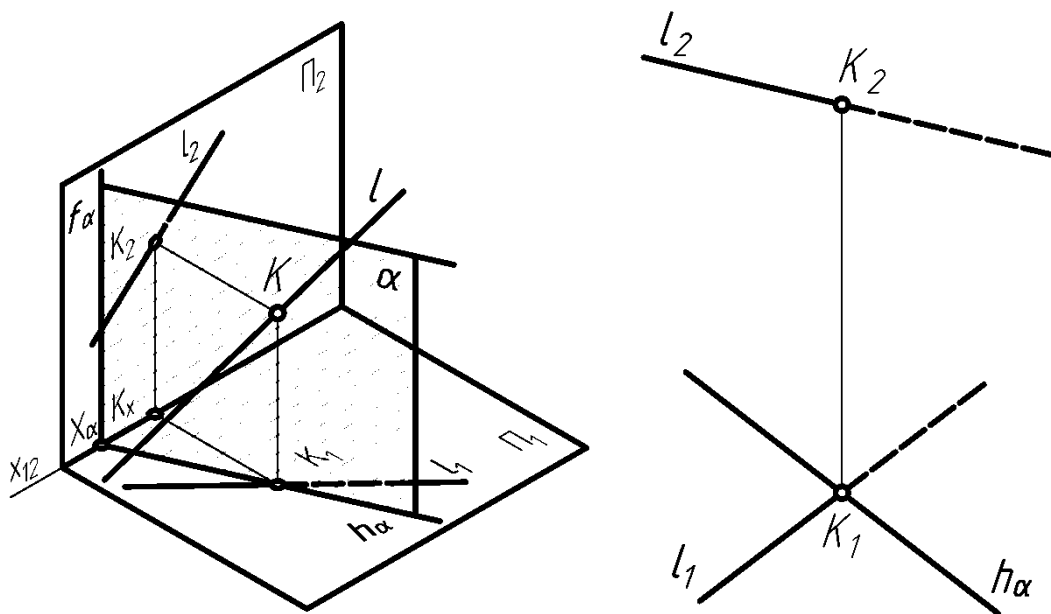


Рис. 3.45

Під час побудови проєкцій лінії перетину площини загального положення  $\alpha(m \cap n)$  з горизонтально – проєкціуючою площиною  $\beta(h_\beta)$ , (рис. 3.46) у площині загального положення виділяють дві прямі ( $m$  і  $n$ ), будують проєкції точок перетину  $m$  і  $n$  з площиною  $\beta(m \cap \beta = M, n \cap \beta = N)$ , отримані однойменні проєкції точок сполучають між собою ( $N_1, M_1 \in l_1, N_2, M_2 \in l_2$ ).

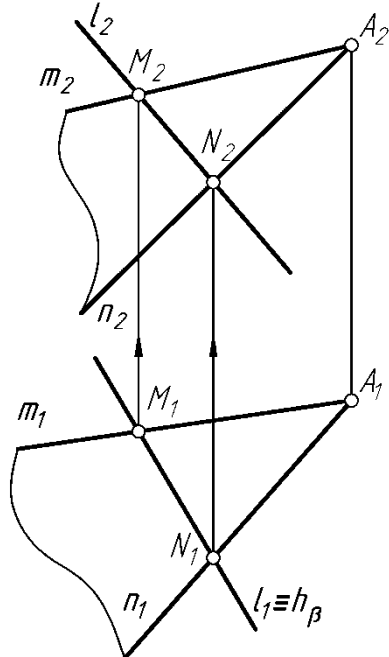


Рис. 3.46

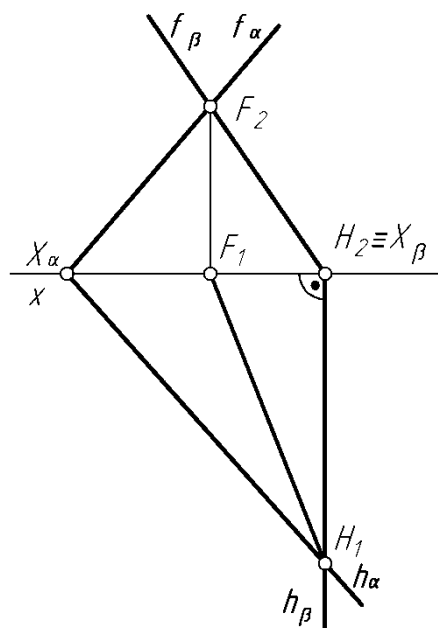


Рис. 3.47

Якщо площини задані слідами  $\alpha(h_\alpha f_\alpha)$  – площина загального положення,  $\beta(h_\beta f_\beta)$  – фронтально-проєкціуюча площина (рис. 3.47), то в якості прямих, які належать площині загального положення, вибирають сліди  $h_\alpha$  і  $f_\alpha$ . Тоді проєкції точок перетину площин лежать у точках перетину однойменних слідів ( $h_\alpha \cap h_\beta = H_1, f_\alpha \cap f_\beta = F_2$ ), прямим проєкціюванням  $H_1$  і  $F_2$  на вісь

$x$  отримують  $H_2$  і  $F_1$ , через  $H_1$  і  $F_1$  проводять горизонтальну проекцію лінії перетину площин  $\alpha$  і  $\beta$  ( $H_1F_1$ ), через  $H_2$  і  $F_2$  проводять фронтальну проекцію лінії перетину площин  $\alpha$  і  $\beta$  ( $H_2F_2$ ).

### 3.9. Перетин прямої з площиною загального положення та визначення видимості прямої на епюрі

Під час виконання й читання креслень необхідно визначати взаємне розміщення прямої і площини. Існує три випадки взаємного розміщення прямої і площини: пряма належить площині ( $l \subset \alpha$ ), пряма паралельна до площини ( $l \parallel \alpha$ ), пряма перетинає площину ( $l \cap \alpha$ ). Щоб визначити взаємне розміщення прямої і площини на еп'юрі використовують площину-посередник (рис. 3.48). Через пряму  $l$  проводять площину  $\beta$  ( $l \subset \beta$ ) до перетину з площиною  $\alpha$ , будують лінію перетину площин  $\alpha$  і  $\beta$  ( $\alpha \cap \beta = MN$ ).

Якщо  $MN$  збігається з прямою  $l$  ( $MN \equiv l$ ) – пряма  $l$  належить площині  $\alpha$  ( $l \subset \alpha$ ).

Якщо  $MN$  паралельна до  $l$  ( $MN \parallel l$ ) – пряма  $l$  паралельна до площини  $\alpha$  ( $l \parallel \alpha$ ).

Якщо  $MN$  перетинає пряму  $l$  ( $MN \cap l$ ) – пряма  $l$  перетинає площину  $\alpha$  ( $l \cap \alpha$ ).

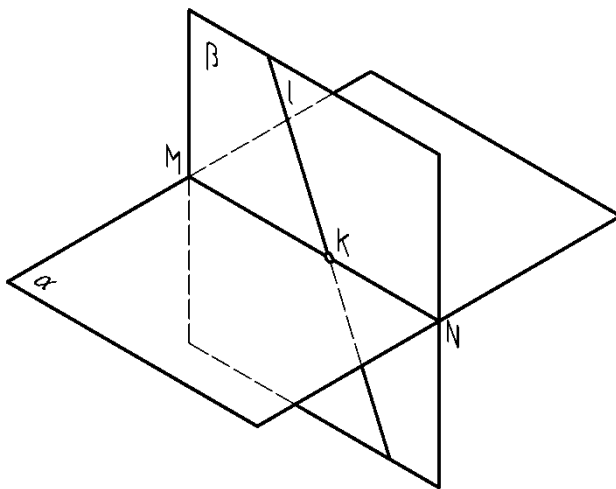


Рис. 3.48

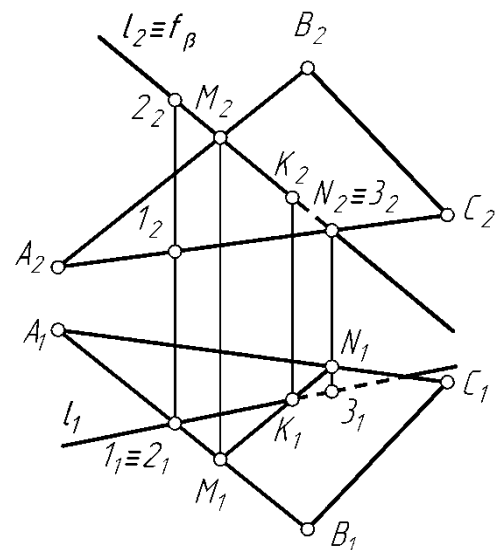


Рис. 3.49

Нехай дані проекції прямої  $l(l_1, l_2)$  і площини  $\alpha(A_1B_1C_1, A_2B_2C_2)$ , які не паралельні між собою і займають довільне положення відносно площин проекцій (рис. 3.49). Необхідно побудувати проекції точки перетину прямої з площиною  $K(K_1, K_2)$  і визначити видимість прямої.

В якості площини-посередника використовують проекціюючу площину. Тоді її характерний слід збігається з однойменною проекцією прямої.

Для розв'язування поставленої задачі через  $l$  проводять фронтально-проекціюючу площину  $\beta(f_\beta \equiv l_2)$ , будують фронтальну проекцію лінії перетину площин  $\alpha$  і  $\beta$   $M_2N_2$  ( $f_\beta \cap A_2B_2 = M_2$ ,  $f_\beta \cap A_2C_2 = N_2$ ), прямим проекціюванням  $M_2$  на  $A_1B_1$  отримують  $M_1$ , прямим проекціюванням  $N_2$  на  $A_1C_1$

отримують  $N_1$ , через  $M_1$  і  $N_1$  проводять горизонтальну проекцію лінії перетину площин  $\alpha$  і  $\beta$ , в точці перетину  $M_1N_1$  з  $l_1$  отримують  $K_1$  – горизонтальну проекцію точки перетину прямої  $l$  з площиною  $\alpha$  ( $M_1N_1 \cap l_1 = K_1$ ), прямим проєкціюванням  $K_1$  на  $l_2$  отримують  $K_2$  – фронтальну проекцію точки перетину прямої  $l$  з площиною  $\alpha$ .

Для визначення видимості прямої до точки перетину з площиною і після неї використовують проєкції конкуруючих точок.

Для визначення видимості на горизонтальній проєкції розглядають точки  $1 \in AC$  і  $2 \in l$ . Горизонтальні проєкції точок співпадають ( $1_1 \equiv 2_1$ ), отже дані точки лежать на проєкціуючій прямій. Прямим проєкціюванням  $1_1$  на  $A_2C_2$  і  $2_1$  на  $l_2$  отримують  $1_2$  і  $2_2$  і визначають, що точка 2 лежить відносно до площини  $\Pi_1$  вище, ніж точка 1. Тобто на горизонтальній проєкції видимою є точка 2, яка належить прямій  $l$ . Це означає, що  $l_1$  від точки  $2_1$  до  $K_1$  видима. Відповідно праворуч від  $K_1$   $l_1$  невидима.

Аналогічно визначають видимість на фронтальній проєкції, використовуючи конкуруючі точки  $N \in AC$  і  $3 \in l$ .

Побудову проєкцій точки перетину прямої  $a$  з площиною  $\beta(h_\beta, f_\beta)$  заданою слідами виконують аналогічно розглянутому вище випадку (рис. 3.50): через пряму  $a$  проводять горизонтально проєкціуючу площину  $\gamma(a_1 \equiv h_\gamma)$ , будують проєкції лінії перетину площин  $\beta$  і  $\gamma$   $HF(H_1F_1, H_2F_2)$ , ( $H_1 = h_\beta \cap h_\gamma$ ,  $F_2 = f_\beta \cap f_\gamma$ ), будують проєкції точки перетину  $K(K_1, K_2)$  прямої  $a$  з площиною  $\beta$  ( $a_2 \cap H_2F_2 = K_2$ ).

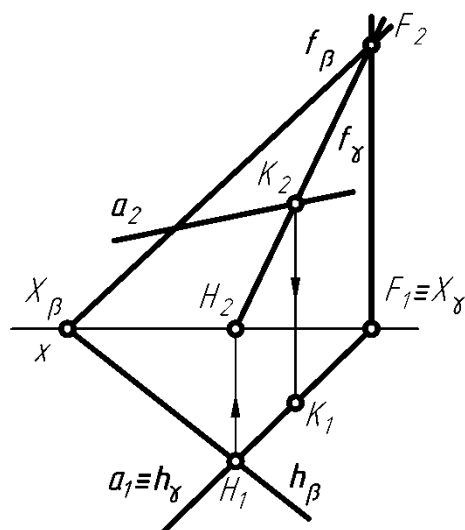


Рис. 3.50

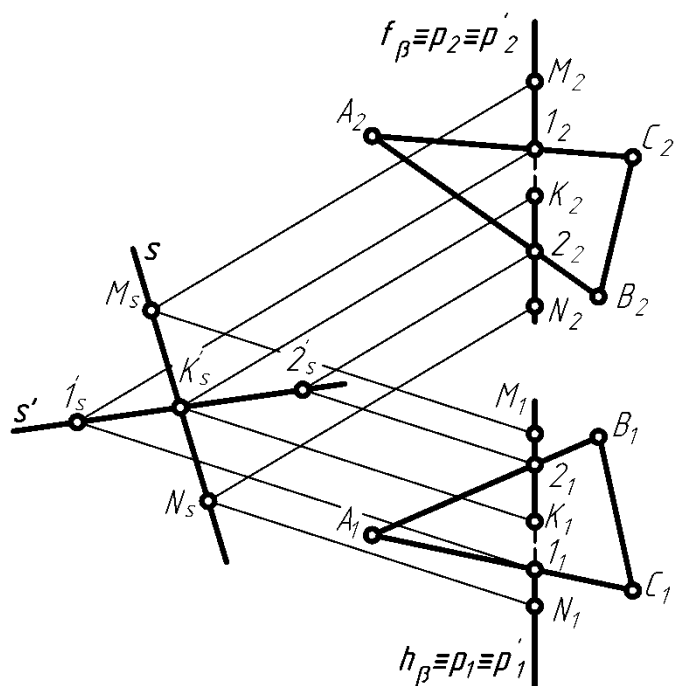


Рис. 3.51

**Завдання 3.5.** Побудувати проєкції точки перетину профільної прямої  $p$  з площиною загального положення  $\alpha(ABC)$  (рис. 3.51).



**Розв'язування.** Для побудови використовують промені переломлення. Через проекції точок  $M(M_1, M_2)$  і  $N(N_1, N_2)$ , які належать прямій  $p$ , виконують побудову променя переломлення  $s(M_s, N_s)$ , через пряму  $p$  проводять профільну площину  $\beta(h_\beta, f_\beta)$ , яка перетинає площину  $\alpha$  по профільній прямій  $p^l(p^l_1, p^l_2)$ , точки  $1(I_1, I_2)$  і  $2(2_1, 2_2)$  належать  $p^l$  ( $f_\beta \cap A_2 C_2 = I_2$ ,  $f_\beta \cap A_2 B_2 = 2_2$ ,  $h_\beta \cap A_1 B_1 = 2_1$ ,  $h_\beta \cap A_1 C_1 = I_1$ ), через проекції точок  $1$  і  $2$  виконують побудову променя переломлення  $s^l(I s^l, 2 s^l)$ . Промені переломлення  $s$  і  $s^l$  перетинаються в точці  $K_s$  ( $s \cap s^l = K_s$ ), яка і є точкою перетину прямої  $p$  з площиною  $\alpha$ ,  $K_1$  і  $K_2$  будують як проекції точки  $K$ , яка належить профільній прямій.

Видимість прямої  $p$  відносно площини  $\alpha$  визначають з допомогою променів переломлення або за просторовою уявою.

**Завдання 3.6.** Побудувати проекції точки перетину прямої  $b(b_1, b_2)$  з площиною  $\alpha(h_\alpha, f_\alpha)$ , причому сліди площини на кресленні збігаються, а проекції прямої паралельні до слідів площини ( $b_1 \parallel h_\alpha \parallel f_\alpha$ ) (рис. 3.52).

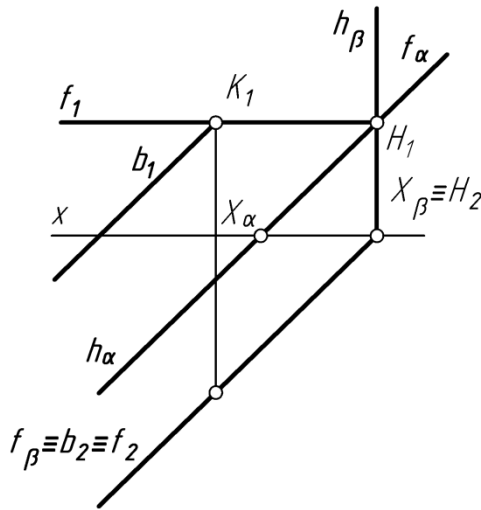


Рис. 3.52

**Розв'язування.** Через пряму  $b$  проводять фронтально-проекціюючу площину  $\beta(b_2 \equiv f_\beta)$ , будуючи проекції лінії перетину площин  $\alpha$  і  $\beta$  враховують, що фронтальні сліди площин не перетинаються ( $f_\alpha \parallel f_\beta$ ), отже фронтальна проекція лінії перетину площин  $f_2$  збігається з  $f_\beta$  як пряма, що лежить у фронтально-проекціюючій площині ( $f_\beta \equiv b_2 \equiv f_2$ ). Горизонтальна проекція лінії перетину площин  $f_1$  паралельна осі  $x$  і проходить через точку перетину горизонтальних слідів площин  $H_1$  ( $h_\alpha \cap h_\beta = H_1$ ). Горизонтальна проекція точки перетину прямої  $b$  з площиною  $\alpha$  знаходиться у точці перетину  $f_1$  з  $b_1$  ( $f_1 \cap b_1 = K_1$ ), прямим проекціюванням  $K_1$  на  $b_2$  отримують  $K_2$ .

### 3.10. Побудова проекцій лінії взаємного перерізу площин

Площини перерізаються по прямим лініях, які називають лініями взаємного перерізу площин. Для побудови проекцій ліній взаємного перерізу площин на кресленні використовують проекціюючі площини-посередники.

Якщо на кресленні однойменні проекції відсіків площин накладаються, тоді для побудови проекцій лінії взаємного перерізу площин достатньо виділити у площинах дві прямі лінії, побудувати проекції точок їхнього перетину з площинами й отримані однойменні проекції точок сполучити між собою.

Нехай потрібно побудувати проекції лінії взаємного перерізу площини  $\alpha(ABC)$  з площиною  $\beta(a/b)$  (рис. 3.53). Для виконання побудови вибирають прямі, які задають площини. При цьому, прямі можуть належати одній з них або двом різним площинам. У нашому випадку для побудови

використовують прямі  $AB$  і  $BC$ . Через  $AB$  проводять фронтально-проекціюючу площину  $\tau(f_\tau \equiv A_2B_2)$  і будують проекції точки перетину  $AB$  з  $\beta$  ( $AB \cap \beta = M$ ), через  $BC$  проводять горизонтально-проекціюючу площину  $\gamma(h_\gamma \equiv B_1C_1)$  і будують проекції точки перетину  $BC$  з  $\beta$  ( $BC \cap \beta = N$ ). В результаті побудови отримують  $M_2N_2$  – фронтальну проекцію і  $M_1N_1$  – горизонтальну проекцію лінії взаємного перерізу площин  $\alpha$  і  $\beta$ .

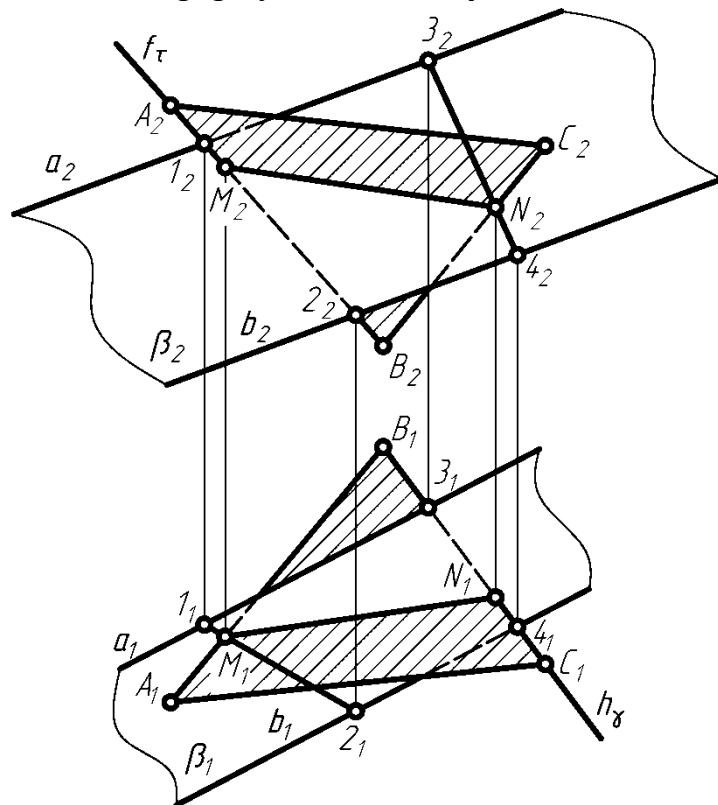


Рис. 3.53

Видимість елементів площин визначають з допомогою описаного вище методу конкуруючих точок.

Якщо на кресленні однойменні проекції відрізків площин не накладаються, тоді для побудови проекцій лінії взаємного перерізу площин достатньо використати дві проекціюючі площини-посередники, які перерізають кожен із заданих площин. Відповідно лінії перерізу заданих площин з площиною посередником перетинаються й отримана точка перетину лежить на лінії перерізу заданих площин. Таким чином, побудувавши проекції ліній перерізу заданих площин з двома площинами-посередниками, отримують проекції двох точок, які лежать на лінії взаємного перерізу заданих площин. Сполучивши однойменні проекції побудованих точок, отримують проекції лінії взаємного перерізу заданих площин. Якщо лінії перерізу заданих площин з площиною-посередником паралельні між собою, то задані площини теж паралельні.

Нехай потрібно побудувати проекції лінії взаємного перерізу площини  $\alpha(a \cap b)$  з площиною  $\beta(m // n)$  (рис. 3.54). Для виконання побудови використовують фронтально-проекціюючі площини  $\tau$  і  $\gamma$ .

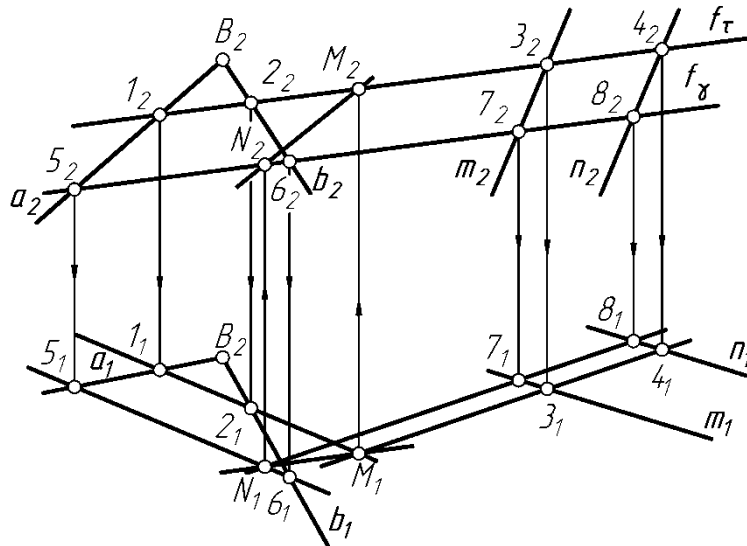


Рис. 3.54

Площина  $\tau$  перерізає площину  $\alpha$  – по прямій  $12$ , а площину  $\beta$  – по прямій  $34$ , фронтальні проекції прямих  $12$  і  $34$  збігаються з фронтальним слідом площини  $\tau$  ( $1_2 2_2 \equiv f_\tau$ ,  $3_2 4_2 \equiv f_\tau$ ). Прямим проєкціюванням на горизонтальні проєкції прямих, які задають площини  $\alpha$  і  $\beta$ , отримують  $1_1$ ,  $2_1$ ,  $3_1$  і  $4_1$ . Через  $1_1$  і  $2_1$  проводять горизонтальну проєкцію лінії перерізу заданої площини  $\alpha$  з площиною-посередником  $\tau$ . Через  $3_1$  і  $4_1$  проводять горизонтальну проєкцію лінії перерізу заданої площини  $\beta$  з площиною-посередником  $\tau$ . Точка перетину  $1_1 2_1$  і  $3_1 4_1$  ( $1_1 2_1 \cap 3_1 4_1 = N_1$ ) лежить на горизонтальній проєкції лінії взаємного перерізу площин  $\alpha$  і  $\beta$ . Прямим проєкціюванням  $N_1$  на  $f_\tau$  отримують  $N_2$ .

Аналогічно будують проєкції точки  $M(M_1, M_2)$  яка лежить на лінії взаємного перерізу площин  $\alpha$  і  $\beta$ , використовуючи для цього фронтально проєкціюючу площину  $\gamma$ .

У результаті побудови отримують  $M_1 N_1$  – горизонтальну проєкцію і  $M_2 N_2$  – фронтальну проєкцію лінії взаємного перерізу площин  $\alpha$  і  $\beta$ .

Побудова проєкцій ліній взаємного перерізу площин, заданих слідами залежить від їхнього розташування. Під час аналізу такого розташування виділяють три випадки:

- 1) однойменні сліди площин перетинаються у межах креслення;
- 2) одна пара однойменних слідів у межах креслення не перетинається;
- 3) обидві пари однойменних слідів у межах креслення не перетинаються.

Нехай потрібно побудувати проєкції лінії взаємного перерізу площин  $\alpha(h_\alpha f_\alpha)$  і  $\beta(h_\beta f_\beta)$ , однойменні сліди яких перетинаються в точках  $H(H \equiv H_1)$  і  $F(F \equiv F_2)$ , ( $h_\alpha \cap h_\beta = H_1$ ,  $f_\alpha \cap f_\beta = F_2$ ) (рис. 3.55).

Прямим проєкціюванням  $H_1$  і  $F_2$  на вісь  $x$  отримують  $H_2$  і  $F_1$ , сполучають однойменні проєкції точок  $H$  і  $F$  і отримують  $H_1 F_1$  – горизонтальну проєкцію і  $H_2 F_2$  – фронтальну проєкцію лінії взаємного перерізу площин  $\alpha$  і  $\beta$ .



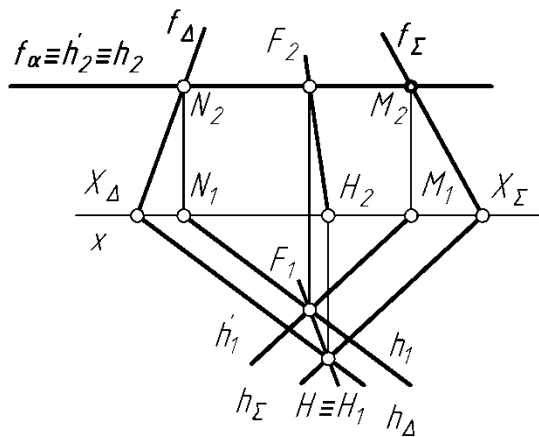


Рис. 3.57

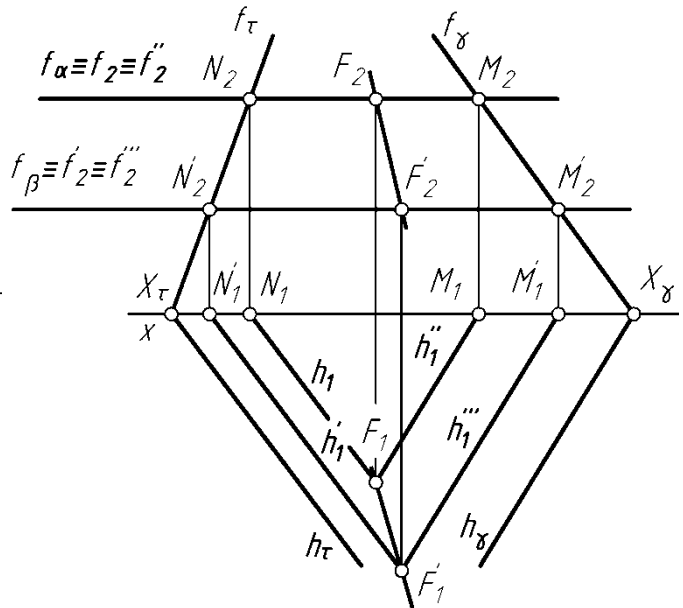


Рис. 3.58

Якщо дві пари слідів заданих площин  $\tau(h_\tau f_\tau)$  і  $\gamma(h_\gamma f_\gamma)$  у межах креслення не перетинаються (рис. 3.58), для побудови проєкцій спільних точок використовують проєкціюючі площини-посередники  $\alpha$  і  $\beta$ . Побудову виконують аналогічно приведеній вище побудові проєкцій точки  $F$ , сполучають однойменні проєкції точок  $F$  і  $F'$  і отримують  $F_1 F'_1$  – горизонтальну проєкцію і  $F_2 F'_2$  – фронтальну проєкцію лінії взаємного перерізу площин  $\tau$  і  $\gamma$ .

**Завдання 3.7.** Побудувати проєкції лінії перерізу двох площин, заданих різними способами  $\alpha(h_\alpha f_\alpha)$ ,  $\beta(a//b)$ , (рис. 3.59).

**Розв'язування.** Побудову проводять шляхом заключення двох прямих, які належать площині задані явним способом, у проєкціюючі площини, або з використанням проєкціюючих площин посередників. Оскільки сліди проєкціюючих площин, у які заключені прямі, не завжди перетинаються з однойменними слідами заданої площини у межах креслення, рекомендують використовувати другий метод.

Для побудови використовують проєкціюючі площини-посередники  $\tau$  і  $\gamma$ . Площина  $\tau$  перерізає площину  $\alpha$  по лінії  $h$  ( $h_2 \equiv f_\tau$ ,  $h_1 // h_\alpha$ ) і площину  $\beta$  по лінії  $12$  ( $1_2 2_2 \equiv f_\tau$ ). На перетині  $h_1$  і  $1_1 2_1$  отримують горизонтальну проєкцію спільної точки  $M(h_1 \cap 1_1 2_1 = M_1)$ , прямим проєкціюванням  $M_1$  на  $f_\tau$  отримують  $M_2$ .

Площина  $\gamma$  перерізає площину  $\alpha$  по лінії  $h^1$  ( $h^1_2 \equiv f_\gamma$ ,  $h^1_1 // h_\alpha$ ) і площину  $\beta$  по лінії  $34$  ( $3_2 4_2 \equiv f_\gamma$ ). На перетині  $h^1_1$  і  $3_1 4_1$  отримують горизонтальну проєкцію спільної точки  $N(h^1_1 \cap 3_1 4_1 = N_1)$ , прямим проєкціюванням  $N_1$  на  $f_\gamma$  отримують  $N_2$ , сполучають однойменні проєкції точок  $M$  і  $N$  і отримують  $M_1 N_1$  – горизонтальну проєкцію і  $M_2 N_2$  – фронтальну проєкцію лінії перерізу площин  $\alpha$  і  $\beta$ , заданих різними способами.

**Завдання 3.8.** Побудувати проєкції точки перетину трьох площин заданих слідами  $\alpha(h_\alpha f_\alpha)$ ,  $\beta(h_\beta f_\beta)$ ,  $\gamma(h_\gamma f_\gamma)$  (рис. 3.60).

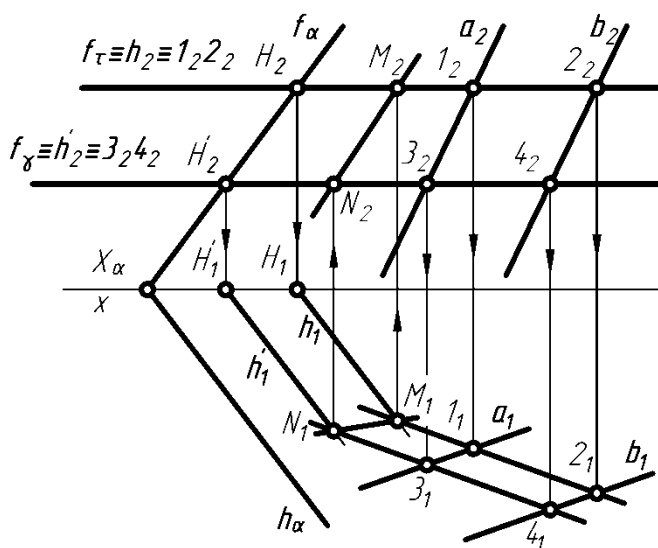


Рис. 3.59

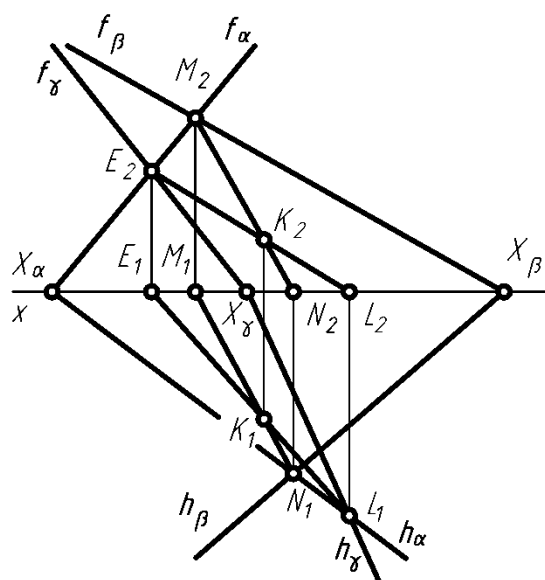


Рис. 3.60

**Розв'язування.** Точка перетину трьох площин лежить на перетині ліній взаємного перерізу даних площин. Тому з-поміж заданих площин вибирають дві і будують проекції їхньої лінії перерізу. Після побудови вибирають іншу пару площин і будують проекції їхньої лінії перерізу. На перетині побудованих проекцій ліній взаємного перерізу площин отримують проекції точки перетину заданих трьох площин.

Отже будують – проекції лінії перерізу площин  $\alpha$  і  $\beta$  ( $\alpha \cap \beta = MN(M_1N_1, M_2N_2)$ ). Аналогічно будують проекції лінії перерізу площин  $\alpha$  і  $\gamma$  ( $\alpha \cap \gamma = EL(E_1L_1, E_2L_2)$ ). На перетині однойменних проекцій  $MN$  і  $EL$  отримують проекції точки  $K(M_1N_1 \cap E_1L_1 = K_1, M_2N_2 \cap E_2L_2 = K_2)$ .

### 3.11. Визначення кута між двома площинами, які перерізаються

Якщо площини перерізаються і не є взаємно перпендикулярними, то між ними існує гострий  $\varphi$  і тупий  $\psi$  кути (рис. 3.61). Кутом між двома площинами вважають той, який відповідає гострому. Тупий кут називають додатковим. Сума величин кута між двома площинами і додаткового кута завжди дорівнює  $180^\circ$  ( $\varphi + \psi = 180^\circ$ ). Мірою двогранного кута є плоский кут між прямими  $m$  і  $n$ , які перпендикулярні до ребра двогранного кута  $l$ , кожна з них відповідно належить площині  $\alpha$  і  $\beta$  ( $m \subset \alpha, n \subset \beta$ ). При цьому вершину кута  $A$  вибирають на ребрі  $l$  довільно, а потім через неї проводять прямі  $m$  і  $n$  (рис. 3.62).

Для побудови величини кута між площинами необхідно:

- 1) побудувати лінію перерізу  $l$  заданих площин  $\alpha$  і  $\beta$ ;
- 2) вибрати на лінії  $l$  довільну точку  $A$ ;
- 3) через точку  $A$  провести площину  $\Delta(m \cap n)$ , перпендикулярну до прямої  $l$ ;
- 4) побудувати лінії перетину  $m$  і  $n$  площини  $\Delta$  з площинами  $\alpha$  і  $\beta$  ( $\Delta \cap \alpha = m, \Delta \cap \beta = n$ ).

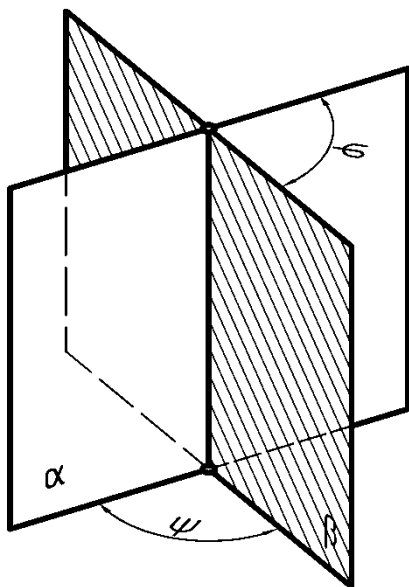


Рис. 3.61

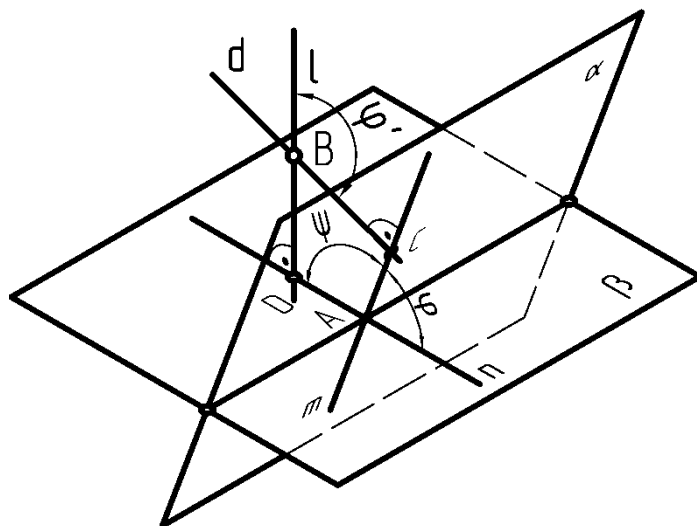


Рис. 3.62

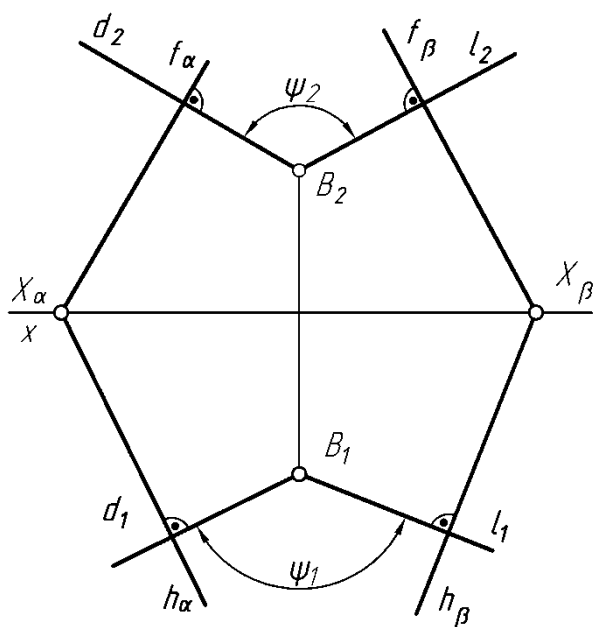


Рис. 3.63

Часто для побудови величини кута між площинами у просторі вибирають довільну точку  $B$ , опускають з неї перпендикуляри до перетину з заданими площинами ( $d \perp \alpha$ ,  $d \cap \alpha = C$ ), ( $l \perp \beta$ ,  $l \cap \beta = D$ ), через точки  $C$  і  $D$  проводять прямі  $m$  і  $n$ , перпендикулярні до  $l$  ( $m \perp \alpha$ ,  $n \perp l$ ), і отримують точку  $A$ . За побудовою кута  $BCA$  і  $BDA$  прямі, отже, якщо кут  $CBD$  гострий, то його величина дорівнює величині кута між заданими площинами. Якщо кут  $CBD$  тупий, то його доповнюють кутом  $\phi^I$  до  $180^\circ$  і цей кут є шуканим.

Якщо площини задані слідами  $\alpha(h_\alpha f_\alpha)$  і  $\beta(h_\beta f_\beta)$ , (рис. 3.63) побудову проводять аналогічно.

Будують проєкції довільної точки  $B(B_1, B_2)$  через які проводять проєкції перпендикулярів до площин ( $d_1 \perp h_\alpha$ ,  $d_2 \perp f_\alpha$ ,  $l_1 \perp h_\beta$ ,  $l_2 \perp f_\beta$ ). У результаті отримують проєкції кута  $\psi(\psi_1, \psi_2)$  між площинами  $\alpha$  і  $\beta$ .

## Розділ 4

### Перпендикулярність прямих і площин. Метричні задачі

#### 4.1. Проекціювання плоских кутів. Проекціювання прямого кута

Плоский кут проекціюється на довільну площину проекцій у дійсну величину, якщо його сторони паралельні до даної площини проекцій. В усіх інших випадках проекції гострих і тупих кутів не дорівнюють їхнім дійсним величинам. Якщо одна сторона гострого кута паралельна до площини проекцій, то його проекція на цю площину менша від дійсної величини кута. Якщо одна сторона тупого кута паралельна до площини проекцій, то його проекція на цю площину більша від дійсної величини кута.

Якщо плоский кут прямий і одна його сторона паралельна до площини проекцій, а друга займає загальне положення відносно цієї площини проекцій, то його проекція на цю площину дорівнює дійсній величині кута.

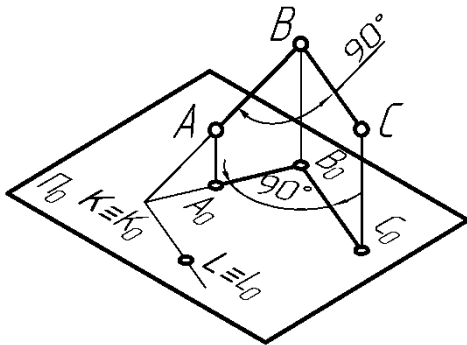


Рис. 4.1

Дану теорему доводять наступною побудовою. Нехай кут  $ABC$  прямий. ( $\angle ABC = 90^\circ$ ), пряма  $BC$  паралельна до  $\Pi_0$  ( $BC \parallel \Pi_0$ ), пряма  $AB$  займає загальне положення відносно  $\Pi_0$  (рис. 4.1). Ортогональним проекціюванням на  $\Pi_0$  отримують  $A_0, B_0, C_0$ , продовжують  $AB$  до перетину з  $\Pi_0$  у точці  $K \equiv K_0$ . Якщо  $BC \parallel \Pi_0$ , тоді  $BK \perp B_0C_0$ . У площині  $\Pi_0$  через  $K_0$  будують пряму  $K_0L_0$ , паралельну  $B_0C_0$  ( $K_0L_0 \parallel B_0C_0$ ). Якщо  $K_0L_0 \parallel B_0C_0 \parallel BC$ , а

$\angle BK_0L_0 = 90^\circ$ , тоді згідно з теоремою про три перпендикуляри  $\angle B_0K_0L_0 = 90^\circ$  відповідно  $\angle A_0B_0C_0 = 90^\circ$ .

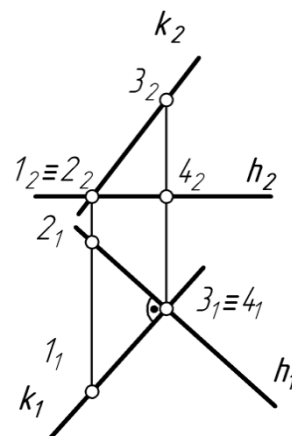
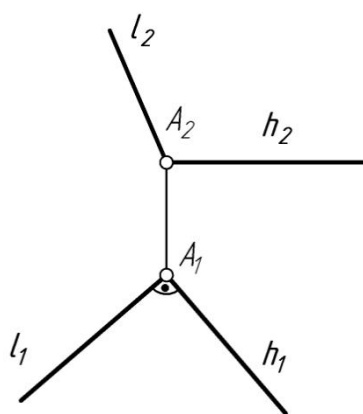


Рис. 4.2

Дві взаємно перпендикулярні прямі можуть перетинатися або бути мимобіжними. Для обох випадків справедливі твердження, що проекції взаємно перпендикулярних прямих зберігають свою перпендикулярність у горизонтальній (рис. 4.2) або фронтальній (рис. 4.3) площинах проекцій, коли одна із цих прямих є відповідно горизонталлю або фронталлю.



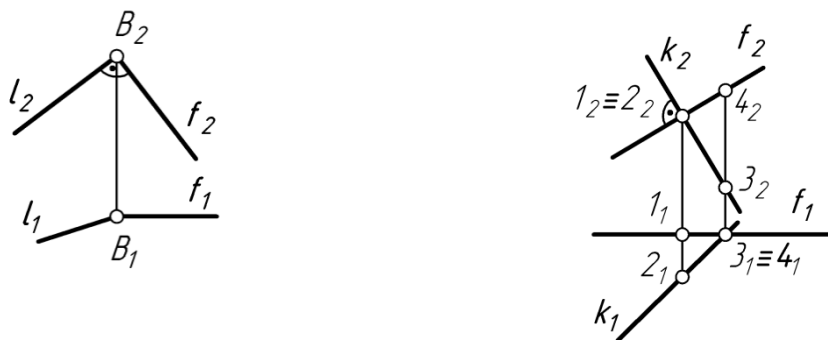


Рис. 4.3

## 4.2. Побудова проекцій перпендикуляра до площини

Пряма перпендикулярна до площини, якщо вона перпендикулярна до двох прямих, що перетинаються і задають площину або знаходяться в ній. Таку пряму називають перпендикуляром до площини, а сама пряма перпендикулярна до кожної прямої, яка лежить у цій площині. Отже перпендикуляр до площини перпендикулярний до кожної горизонталі  $h$  і фронталі  $f$  даної площини. Ця перпендикулярність зберігається для горизонталі у горизонтальній проекції і для фронталі у фронтальній проекції ( $p_1 \perp h_1, p_2 \perp f_2$ ).

Щоб побудувати проекції перпендикуляра до площини загального положення необхідно і достатньо побудувати перпендикуляри до горизонтальної проекції горизонталі й фронтальної проекції фронталі. Справедливе й обернене твердження.

Нехай відомі проекції площини загального положення заданої двома прямими, що перетинаються  $a_1(a_1 \cap b_1)$  і  $a_2(a_2 \cap b_2)$  і довільної точки  $D(D_1, D_2)$  (рис. 4.4). Необхідно побудувати проекції перпендикуляра  $p(p_1, p_2)$ , проведеного з точки  $D$  до площини  $\alpha$ .

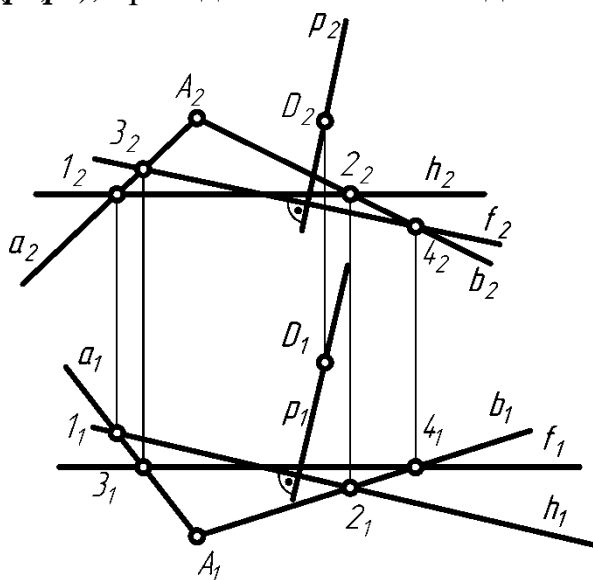


Рис. 4.4.

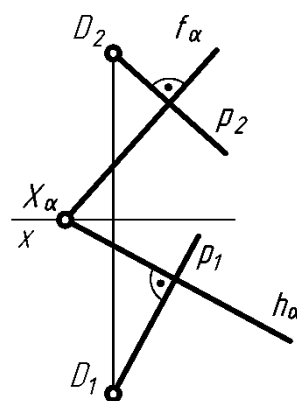


Рис. 4.5.

Будують проєкції горизонталі  $h(h_1, h_2)$  і фронталі  $f(f_1, f_2)$  площини  $\alpha$ , через  $D_2$  будують перпендикуляр до  $f_2$  ( $p_2 \perp f_2$ ), через  $D_1$  будують перпендикуляр до  $h_1$  ( $p_1 \perp h_1$ ). Отже  $p_1$  і  $p_2$  є проєкції перпендикуляра, проведеного з точки  $D$  до площини  $\alpha$ .

Якщо площина задана слідами  $\alpha(h_\alpha, f_\alpha)$ , побудову проєкцій перпендикуляра виконують аналогічно (рис. 4.5). Під час побудови враховують, що горизонтальний слід площини збігається з горизонтальною його проєкцією ( $h_\alpha \equiv h_{\alpha 1}$ ), а фронтальний слід площини збігається з фронтальною його проєкцією ( $f_\alpha \equiv f_{\alpha 2}$ ). Отже вибирають довільну точку  $D(D_1, D_2)$ , через  $D_2$  будують перпендикуляр до  $f_\alpha$  ( $p_2 \perp f_\alpha$ ), через  $D_1$  будують перпендикуляр до  $h_\alpha$  ( $p_1 \perp h_\alpha$ ).

Якщо площина задана слідами, то горизонтальна проєкція перпендикуляра до площини перпендикулярна до горизонтального її сліду, а фронтальна проєкція перпендикуляра до площини перпендикулярна до фронтального її сліду.

### 4.3. Визначення дійсної величини відстані від точки до площини

Відстань від точки до площини дорівнює відрізку перпендикуляра побудованого із заданої точки до точки його перетину з площиною.

Нехай відомі проєкції площини, заданої трьома точками  $\alpha_1(B_1C_1D_1)$  і  $\alpha_2(B_2C_2D_2)$  і точки  $A(A_1, A_2)$ , (рис. 4.6). Необхідно визначити дійсну величину відстані від точки  $A$  до площини  $\alpha$ .

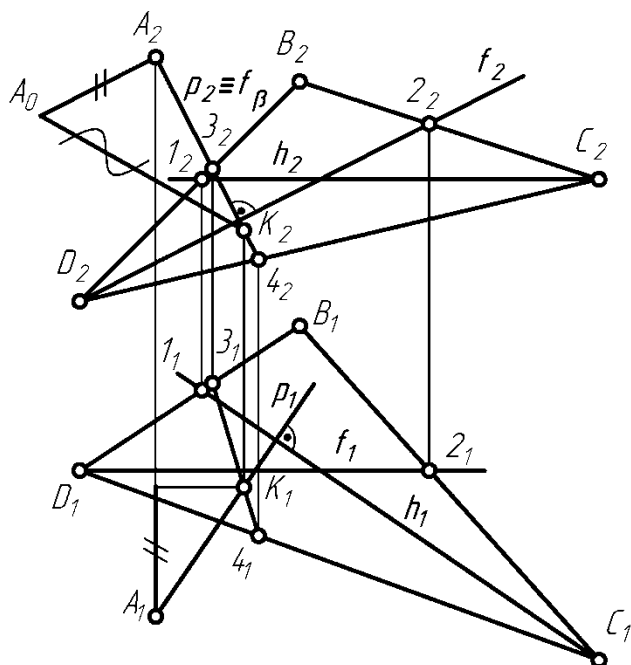


Рис. 4.6

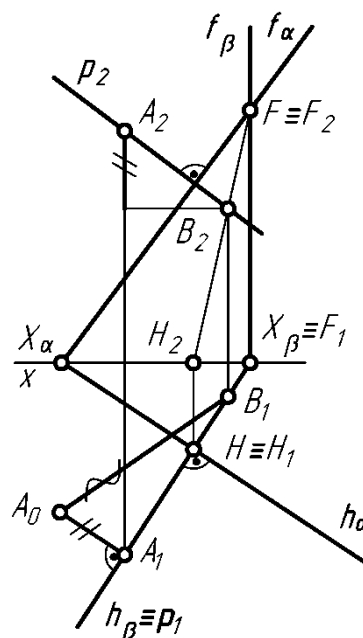


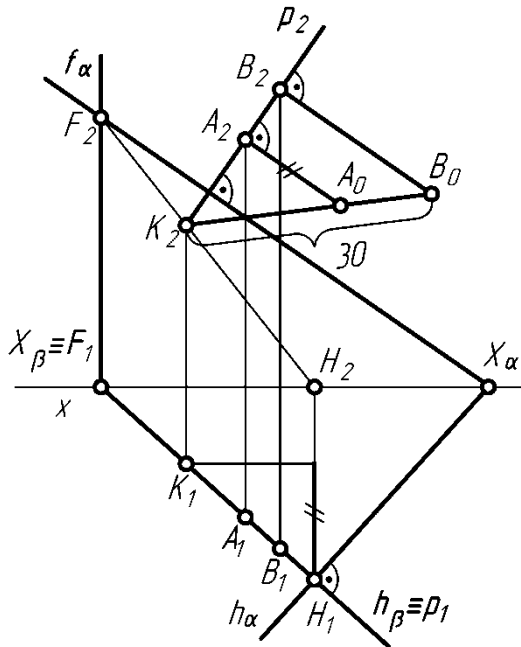
Рис. 4.7

Будують проєкції горизонталі  $h(h_1, h_2)$  і фронталі  $f(f_1, f_2)$  площини  $\alpha$ , через проєкції точки  $A$  будують проєкції перпендикуляра до площини  $\alpha$  ( $p_1 \perp h_1, p_2 \perp f_2$ ), через перпендикуляр  $p$  проводять проєкціюючу площину  $\beta$

( $p_2 \equiv f_\beta$ ) і будують проекції точки перетину  $p$  з  $\alpha$   $K(K_1, K_2)$ , використовуючи метод прямокутного трикутника будують дійсну величину відстані від точки  $A$  до площини  $\alpha$ .

З допомогою аналогічної побудови визначають дійсну величину відстані від точки  $A$  до площини, заданої слідами  $\alpha(h_\alpha, f_\alpha)$  (рис. 4.7.).

**Завдання 4.1.** На відстані 30 мм від площини, заданої слідами  $\alpha(h_\alpha, f_\alpha)$  побудувати точку  $B$  (рис. 4.8).



**Розв'язування.** Будують проекції довільної точки  $A(A_1, A_2)$ , через які проводять однойменні проекції перпендикуляра до площини  $\alpha$  ( $p_1 \perp h_\alpha$ ,  $p_2 \perp f_\alpha$ ), через перпендикуляр проводять горизонтально-проекціюючу площину  $\beta$  ( $h_\beta \equiv p_1$ ,  $f_\beta \perp x$ ) і будують проекції лінії перетину площин  $\alpha$  і  $\beta$   $HF(H_1F_1, H_2F_2)$ . У точці перетину  $H_2F_2$  з  $p_2$  отримують фронтальну проекцію точки перетину перпендикуляра  $p$  з площиною  $\alpha$  ( $H_2F_2 \cap p_2 = K_2$ ), прямим проекціюванням  $K_2$  на  $p_1$  отримують  $K_1$ , використовуючи метод прямокутного трикутника будують дійсну величину відрізка  $AK$ , на якій від точки  $K_2$  відкладають 30 мм і отримують точку  $B_0$ , через  $B_0$  проводять пряму паралельну до  $A_0A_2$

до перетину з  $p_2$  і отримують  $B_2$ , прямим проекціюванням  $B_2$  на  $p_1$  отримують  $B_1$ .

#### 4.4. Побудова проекцій площин, перпендикулярних між собою

Відомі дві ознаки перпендикулярності двох площин:

- дві площини перпендикулярні між собою, якщо одна з них перпендикулярна до прямої, яка лежить у другій площині або паралельна до неї;
- дві площини перпендикулярні між собою, якщо одна з площин проходить через пряму, перпендикулярну до другої площини.

Тому побудову проекцій площин, перпендикулярних між собою можна виконувати двома шляхами:

- будувати проекції перпендикуляра до заданої площини, а потім будувати проекції площини в якій лежить даний перпендикуляр;
- в заданій площині виділяти пряму лінію і до її проекцій будувати проекції перпендикулярної площини.

Нехай відомі проекції площини заданої, трьома точками  $\alpha_1(A_1B_1C_1)$  і  $\alpha_2(A_2B_2C_2)$  і довільної точки  $D(D_1, D_2)$ , (рис. 4.9). Необхідно через  $D$  провести площину  $\beta$ , перпендикулярну до площини  $\alpha$ .

Будують проєкції горизонталі  $h(h_1, h_2)$  і фронталі  $f(f_1, f_2)$  площини  $\alpha$ , через  $D_1$  проводять горизонтальну проєкцію перпендикуляра  $p_1(p_1 \perp h_1)$ , через  $D_2$  проводять фронтальну проєкцію перпендикуляра  $p_2(p_2 \perp f_2)$ . Через точку  $D$  можна провести безліч площин, перпендикулярних до площини  $\alpha$ . Отже, провівши через  $D_1$  і  $D_2$  проєкції довільної прямої  $a(a_1, a_2)$  отримують проєкції площини  $\beta(p \cap a)$ , яка перпендикулярна до площини  $\alpha$  ( $\alpha \perp \beta$ ).

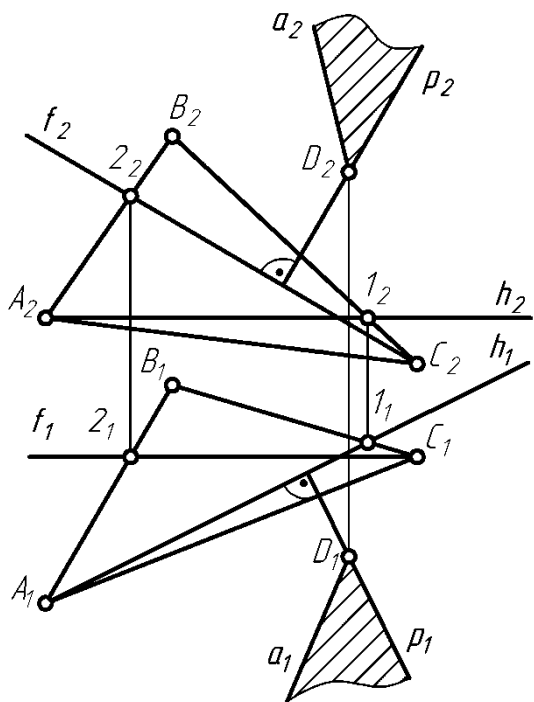


Рис. 4.9

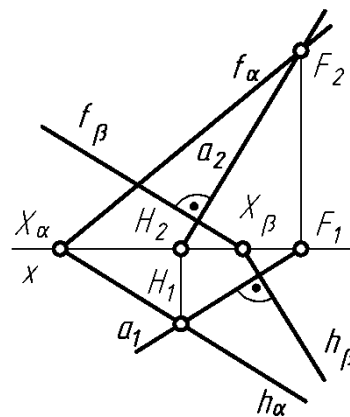


Рис. 4.10

Під час побудови проєкцій перпендикулярних між собою площин, заданих слідами у площині  $\alpha(h_\alpha, f_\alpha)$ , будують довільну пряму  $a(a_1, a_2)$  (рис. 4.10), на осі  $x$  вибирають точку збігу слів для площини  $\beta(X_\beta)$ , через яку проводять  $h_\beta(h_\beta \perp a_1)$  і  $f_\beta(f_\beta \perp a_2)$ .

Будуючи проєкції перпендикулярних між собою площин, заданих слідами, необхідно пам'ятати:

- якщо однойменні сліди двох площин загального положення перпендикулярні між собою, то самі площини між собою не перпендикулярні, оскільки при цьому не виконуються умови перпендикулярності;
- однойменні сліди площин рівня перпендикулярні між собою на тій площині проєкцій, до якої дані площини перпендикулярні (рис. 4.11);

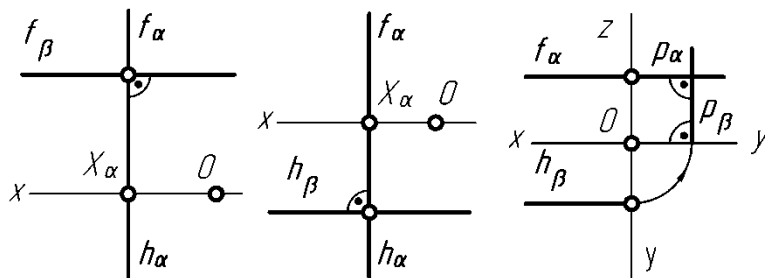


Рис. 4.11

Одноименні сліди проєкціюючих площин перпендикулярні між собою лише на тій площині проєкцій, до якої обидві задані площини перпендикулярні (рис. 4.12).

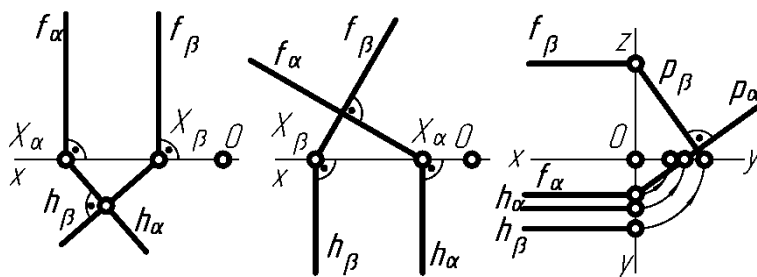
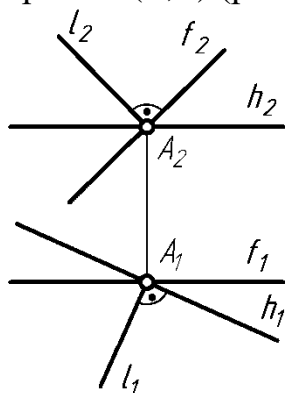


Рис. 4.12.

**Завдання 4.2.** Побудувати проєкції площини, перпендикулярної до прямої  $l(l_1, l_2)$  (рис. 4.13).



**Розв'язування.** Площина перпендикулярна до прямої, якщо горизонтальна проєкція її горизонталі перпендикулярна до горизонтальної проєкції прямої ( $h_1 \perp l_1$ ), а фронтальна проєкція фронталі перпендикулярна до фронтальної проєкції прямої ( $f_2 \perp l_2$ ).

Площину на кресленні задають двома прямими, які перетинаються у точці  $A$ . Для цього на проєкціях прямої вибирають проєкції точки  $A(A_1, A_2)$ .

Прямі, які задають шукану площину одночасно є горизонталлю і фронталлю даної площини.

Через  $A_1$  проводять  $h_1(h_1 \perp l_1)$  і  $f_1(f_1 \parallel x)$ , через  $A_2$  проводять  $h_2(h_2 \parallel x)$  і  $f_2(f_2 \perp l_2)$ .

#### 4.5. Побудова проєкцій прямих перпендикулярних між собою

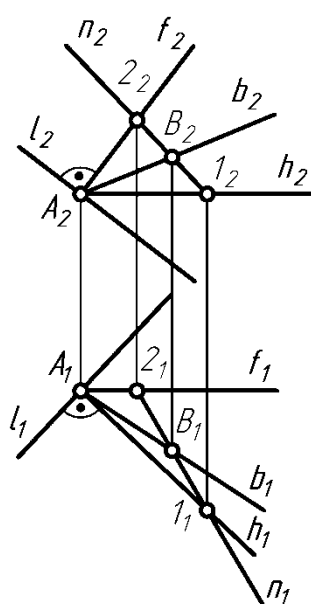


Рис. 4.14

Як було сказано вище, кут між перпендикулярними прямими загального положення не проєкціюється на жодну з площин проєкцій у натуральну величину. Тому побудову проєкцій перпендикулярних між собою прямих загального положення зводять до побудови проєкцій площини, перпендикулярної до заданої прямої.

Отже, на проєкціях заданої прямої  $l(l_1, l_2)$  (рис. 4.14) вибирають проєкції довільної точки  $A(A_1, A_2)$  через які необхідно провести проєкції прямої  $b$ , перпендикулярної до  $l$ . Площину  $\alpha$  задають двома прямими, які перетинаються у точці  $A$  і є горизонталлю і фронталлю даної площини ( $h_1 \perp l_1, f_1 \parallel x, h_2 \parallel x, f_2 \perp l_2$ ). Вибирають проєкції двох точок, які належать площині  $\alpha$  ( $1 \in h, 2 \in f$ ), через проєкції яких проводять

проекції прямої  $n(n \subset \alpha)$ . На  $n$  вибирають довільну точку  $B(B_1, B_2)$ , сполучають однойменні проекції точок  $A$  і  $B$  і отримують проекції прямої  $b$  перпендикулярної до прямої  $l$  ( $b \perp l$ ).

#### 4.6. Побудова проекцій прямої паралельної до площини

Пряма паралельна до площини, якщо площині належить хоча б одна пряма, паралельна до заданої прямої.

Під час виконання креслень виникає необхідність побудови прямої, паралельної до заданої площини або перевірки чи паралельні між собою задані пряма і площина. Для вирішення першого завдання у заданій площині  $\alpha(c \cap d)$ , (рис. 4.15) будують довільну пряму  $b(b_1, b_2)$ , а потім будують проекції  $a \parallel b$  ( $a_1 \parallel b_1, a_2 \parallel b_2$ ).

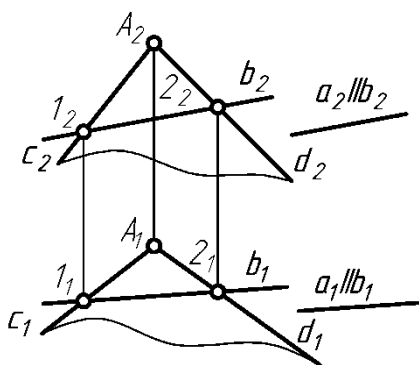


Рис. 4.15

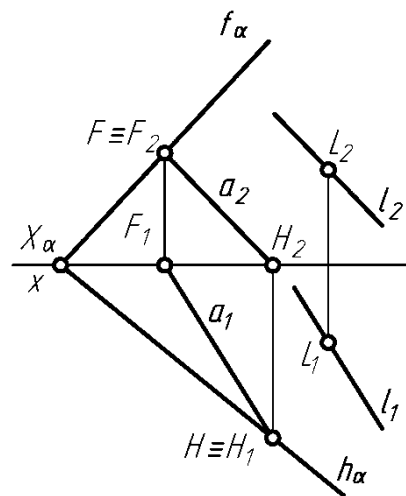


Рис. 4.16

Якщо площина задана слідами  $\alpha(h_\alpha, f_\alpha)$  побудову паралельної прямої виконують аналогічно (рис. 4.16). На слідах заданої площини вибирають точки  $H(H \subset h_\alpha)$  і  $F(F \subset f_\alpha)$ , через однойменні проекції точок  $H$  і  $F$  будують проекції прямої  $a(a_1, a_2)$ , яка належить площині  $\alpha$ , через проекції довільно вибраної точки  $L(L_1, L_2)$  будують  $l \parallel a$  ( $l_1 \parallel a_1, l_2 \parallel a_2$ ).

Для перевірки чи паралельні між собою задані пряма і площина, якщо відомі їхні проекції (рис. 4.17), у площині будують пряму, одна з проекцій якої паралельна до однойменної проекції заданої прямої ( $l_2 \parallel a_2$ ). Якщо побудована прямим проєкціюванням друга проекція прямої паралельна до однойменної проекції заданої прямої ( $l_1 \parallel a_1$ ), то задані пряма і площина паралельні між собою. Якщо ж проекції не паралельні ( $l_1 \not\parallel a_1$ ) то пряма і площина не паралельні.

**Завдання 4.3.** На відстані **30 мм** від площини, заданої слідами  $\alpha(h_\alpha, f_\alpha)$  побудувати пряму  $l$ , паралельну до  $\alpha$  (рис. 4.18).

**Розв'язування.** Будують проекції точки  $A(A_1, A_2)$ , віддаленої від площини  $\alpha$  на **30 мм**. Для цього вибирають довільну точку  $B(B_1, B_2)$ , через яку проводять проекції перпендикуляра до площини  $p(p_1 \perp h_\alpha, p_2 \perp f_\alpha)$ , будують проекції точки перетину перпендикуляра з площиною  $K(K_1, K_2)$ , ( $p \cap \alpha = K$ ), знаходять натуральну величину відрізка  $BK$ , на якій на відстані **30 мм** від  $K$

будують  $A_0$ , оберненим паралельним проєкціюванням на проєкціях перпендикуляра  $p$  отримують проєкції точки  $A$  ( $A_1 \subset p_1, A_2 \subset p_2$ ).

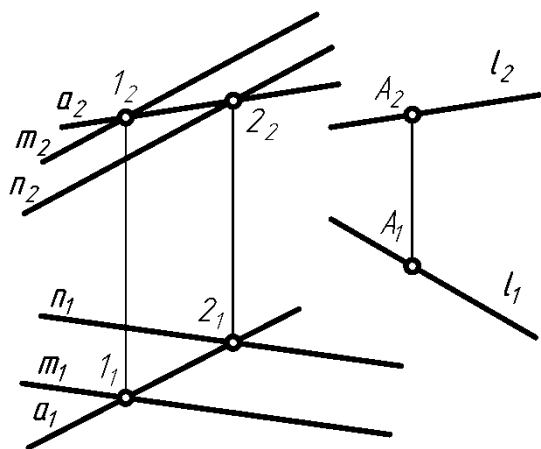


Рис. 4.17

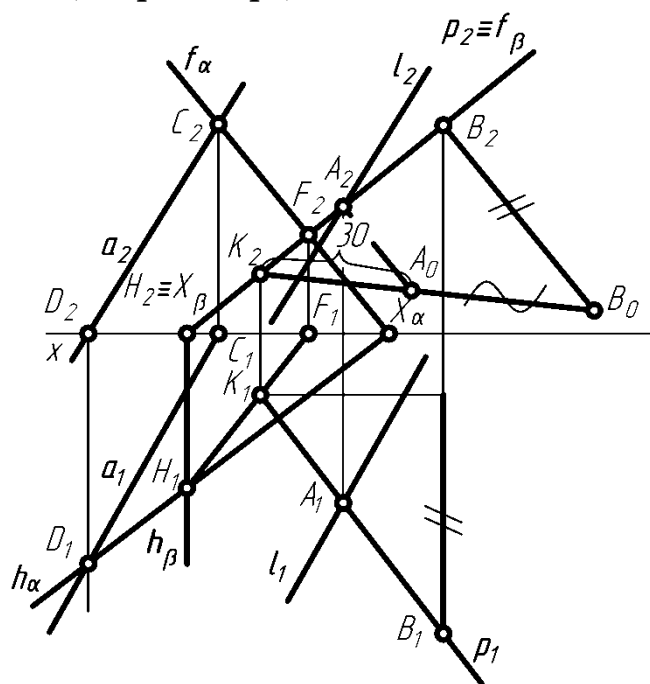


Рис. 4.18

У заданій площині будують пряму  $a(a_1, a_2)$ . Через проєкції точки  $A(A_1, A_2)$  будують однойменні проєкції прямої  $l(l_1 || a_1, l_2 || a_2)$ .

#### 4.7. Побудова проєкцій площин, паралельних між собою

Площини паралельні між собою, якщо дві прямі, які перетинаються і належать першій площині, паралельні до двох прямих, які перетинаються і належать другій площині.

Якщо горизонталі й фронталі двох площин паралельні між собою то площини паралельні.

Нехай через точку  $K(K_1, K_2)$  необхідно провести площину  $\beta(c \cap d)$  паралельну до площини  $\alpha(a \cap b)$  (рис. 4.19).

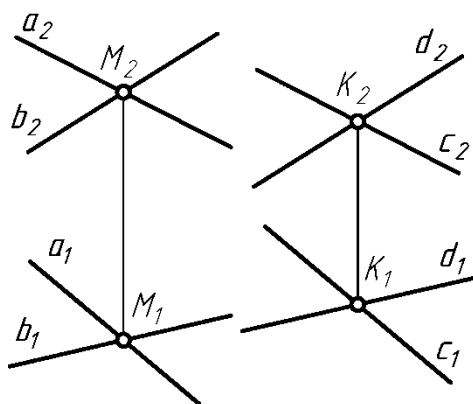


Рис. 4.19

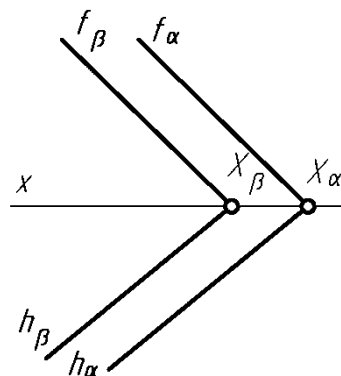


Рис. 4.20

Для побудови площини  $\beta$  достатньо через  $K_1$  провести  $c_1 || a_1$  і  $d_1 || b_1$ , а через  $K_2$  провести  $c_2 || a_2$  і  $d_2 || b_2$ .

Площини, задані слідами паралельні між собою якщо їхні однойменні сліди паралельні (рис. 4.20).

Щоб перевірити чи паралельні між собою задані площини, достатньо побудувати проекції їхніх горизонталей і фронталей (рис. 4.21). Якщо однойменні проекції головних ліній площин паралельні, площини між собою паралельні, в іншому випадку – площини не паралельні.

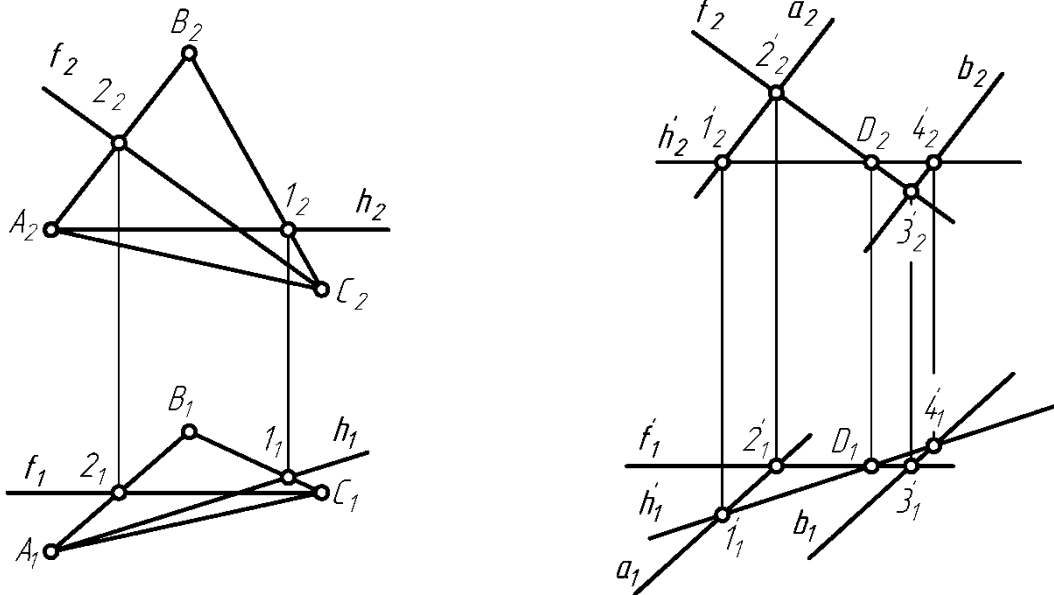
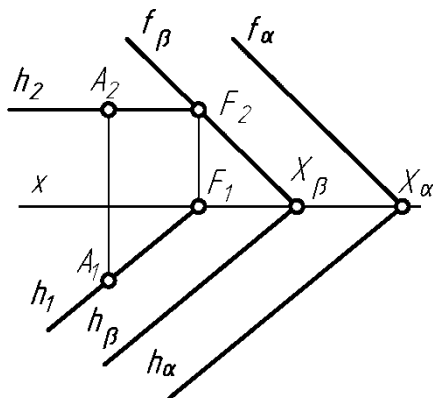


Рис. 4.21

**Завдання 4.4.** Через точку  $A(A_1, A_2)$  провести площину  $\beta(h_\beta, f_\beta)$ , паралельну до заданої площини  $\alpha(h_\alpha, f_\alpha)$  (рис. 4.22).



**Розв'язування.** Через проекції точки  $A$  проводять однойменні проекції однієї з головних ліній площини  $\beta$  ( $A_2 \in h_2 \parallel x$ ,  $A_1 \in h_1 \parallel h_\alpha$ ). Точка перетину  $h_1$  з віссю  $x$  є горизонтальною проекцією фронтального сліду горизонталі  $h$  площини  $\beta$  ( $h_1 \cap x = F_1$ ). Прямим проєкціюванням  $F_1$  на  $h_2$  отримують  $F_2$  – фронтальну проекцію фронтального сліду горизонталі  $h$  площини  $\beta$ . Отже через  $F_2$  будують фронтальний слід площини  $\beta$  ( $f_\beta \parallel f_\alpha$ ) до перетину з віссю  $x$  і отримують точку збігу слідів площини  $\beta$  ( $f_\beta \cap x = X_\beta$ ). Через  $X_\beta$  будують горизонтальний слід площини  $\beta$  ( $h_\beta \parallel h_\alpha$ ). Таким чином, площини  $\alpha$  і  $\beta$  паралельні, оскільки їхні однойменні сліди паралельні.

Таким чином, площини  $\alpha$  і  $\beta$  паралельні, оскільки їхні однойменні сліди паралельні.



## Розділ 5

### Методи перетворення ортогональних проекцій

#### 5.1. Різновидності й особливості методів перетворення ортогональних проекцій

Розв'язування позиційних і метричних задач можна значно спростити, якщо задані геометричні фігури розмістити паралельно або перпендикулярно відносно площин проекцій  $\Pi_1$ ,  $\Pi_2$  і  $\Pi_3$ . Але під час виконання креслень геометричної фігури складної форми неможливо знайти таке положення, щоб усі її елементи займали особливе положення відносно площин проекцій. Тому в інженерній графіці часто використовують перетворення комплексних креслень, які дозволяють окремі елементи (лінії або площини) геометричних фігур із загального положення перевести в особливе положення відносно площин проекцій. Такі перетворення виконують шляхом заміни взаємного положення геометричної фігури та площин проекцій, або зміни напрямку проекціювання. У нашому розділі принцип зміни напрямку проекціювання не розглядають.

Заміну взаємного положення геометричної фігури та площин проекцій виконують методом заміни площин проекцій або методом плоскопаралельного переміщення. Заміну площин проекцій виконують при непорушній геометричній фігурі, а плоскопаралельне переміщення виконують при непорушній системі площин проекцій.

У свою чергу з плоскопаралельного переміщення як окремі випадки виділяють методи обертання навколо проекціюючих прямих і прямих рівня.

Використовуючи методи перетворення ортогональних проекцій, розв'язують чотири типи задач:

- перетворення прямої загального положення у пряму рівня, тобто визначення дійсної величини відрізка прямої і кутів нахилу його до площин проекцій;
- перетворення площини загального положення у проекціюючу площину, тобто визначення відстані від точки до площини і кута нахилу площини до площин проекцій;
- перетворення прямої загального положення у проекціюючу пряму, тобто визначення відстаней між точкою і прямою, між двома паралельними або мимобіжними прямими, визначення натуральної величини двогранного кута;
- перетворення площини загального положення у площину рівня, тобто визначення дійсних величин і форм плоских фігур та лінійних кутів.

#### 5.2. Метод заміни площин проекцій

Перетворення за допомогою заміни площин проекцій полягає в тому, що потрібне розташування геометричної фігури відносно площин проекцій

досягають заміною однієї системи площин проєкцій на іншу при непорушній геометричній фігурі. Під час кожної такої заміни нова система двох площин проєкцій має у своєму складі одну площину проєкцій від попередньої системи, а нова площина проєкцій обов'язково перпендикулярна до площини проєкцій зі старої системи.

Нехай на систему площин проєкцій  $\Pi_1$  і  $\Pi_2$  спроекційована точка  $A(A_1, A_2)$  (рис. 5.1). Перпендикулярно до  $\Pi_1$  проводять нову вертикальну площину  $\Pi_4$ , на яку ортогонально проєкціюють точку  $A(A_4)$ . В результаті заміни отримують систему площин проєкцій  $\Pi_1$  і  $\Pi_4$  з проєкціями точки  $A_1$  і  $A_4$ . При такій заміні відстань від фронтальної проєкції точки до  $x_{12}$  дорівнює відстані від нової проєкції точки  $A_4$  до нової осі  $x_{14}$ .

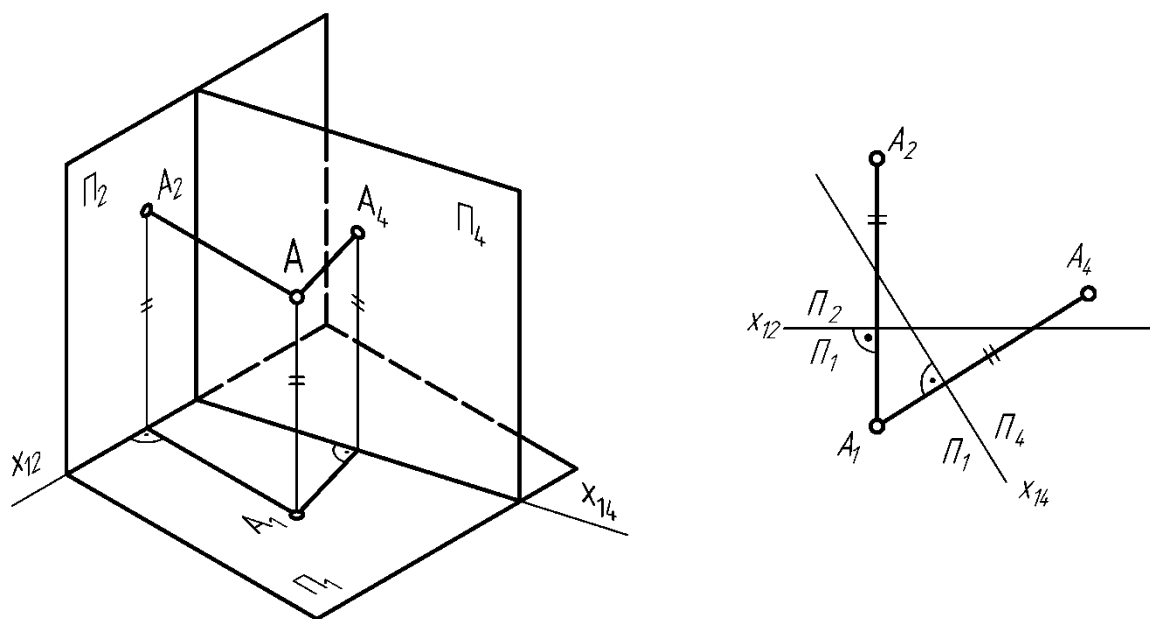


Рис. 5.1

Заміною однієї площини проєкцій відрізок прямої загального положення може стати паралельним до нової площини проєкцій  $\Pi_4$ , що дає можливість визначити його натуральну величину і кут нахилу до однієї з площин проєкцій.

Нехай відомі проєкції на  $\Pi_1$  і  $\Pi_2$  відрізка прямої загального положення  $CD(C_1D_1, C_2D_2)$  (рис. 5.2). Необхідно визначити натуральну величину відрізка  $CD$  і кут його нахилу до  $\Pi_2$ .

Замінують  $\Pi_1$  на  $\Pi_4 \perp \Pi_2$ , при цьому нова вісь  $x_{24} \parallel C_2D_2$ , з  $C_2$  і  $D_2$  опускають перпендикуляри на  $x_{24}$  і відкладають на них перевищення  $C_1$  і  $D_1$  над  $x_{12}$ . Отримана проєкція  $C_4D_4$  дорівнює натуральній величині відрізка  $CD$ , а кут  $\varphi$  дорівнює куту нахилу прямої до  $\Pi_2$ .

Для перетворення прямої загального положення у проєкціюючу пряму необхідно виконати два рази заміну площин проєкцій (рис. 5.3). Під час першої заміни пряма стає паралельною до однієї з площин проєкцій. Під час другої заміни площина  $\Pi_5$  перерізає площину  $\Pi_4$  по осі  $x_{45}$ , яка перпендикулярна до  $A_4B_4$ , під час побудови нової проєкції прямої вона вироджується в точку.

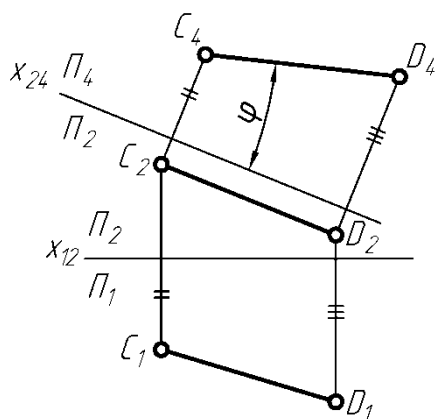


Рис. 5.2

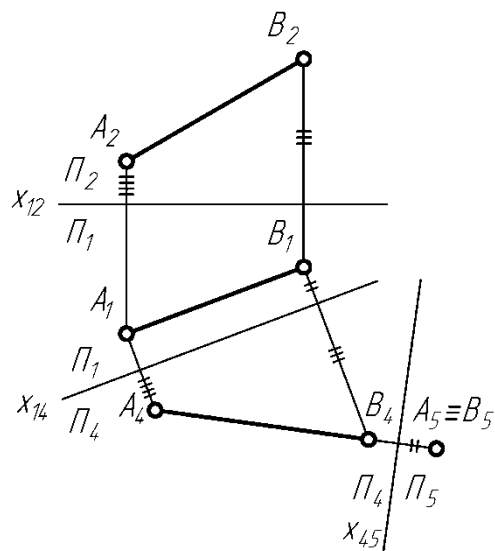


Рис. 5.3

Таку побудову використовують під час визначення відстаней від точки до прямої і між паралельними або мимобіжними прямими.

**Завдання 5.1.** Визначити відстань між мимобіжними прямими  $l$  і  $m$  і побудувати проекції відстані у вихідній системі проекцій (рис. 5.4).

**Розв'язування.** Відстань між мимобіжними прямими це найкоротша відстань, яку визначає їх взаємний перпендикуляр.

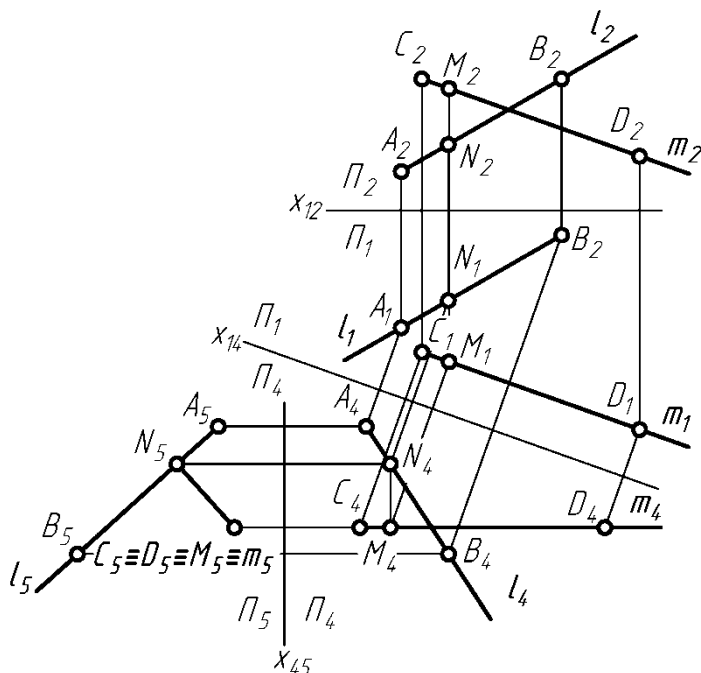


Рис. 5.4

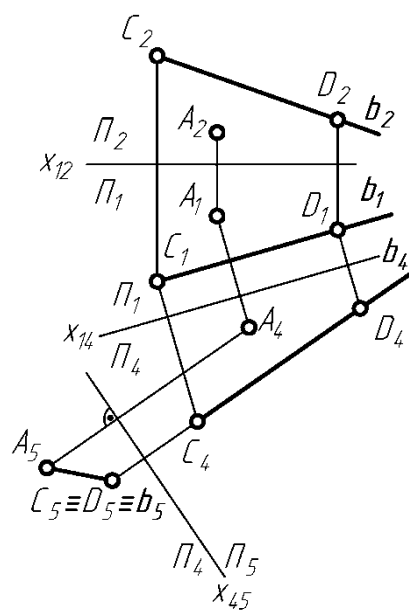


Рис. 5.5

На заданих прямих вибирають відрізки ( $AB \subset l$ ,  $CD \subset m$ ) і виконують заміну  $\Pi_2$  на  $\Pi_4$ , яка паралельна до однієї з заданих прямих ( $\Pi_4 \parallel m$ ), проводять  $x_{14} \parallel m_1$ , будують  $A_4B_4$  і  $C_4D_4$ , площину  $\Pi_1$  замінюють площиною  $\Pi_5$ , яка перпендикулярна до  $m$ , проводять  $x_{45} \perp m_4$  і будують  $A_5B_5$  і  $C_5D_5$ . На  $\Pi_5$  пряма  $m$  проєкціюється в точку ( $m_5 \equiv C_5 \equiv D_5$ ). З  $C_5$  опускають перпендикуляр на  $A_5B_5$ . Кінці побудованого перпендикуляра належать заданим прямим

( $M_5 \subset m_5$ ,  $N_5 \subset l_5$ ) і є найближчими точками на мимобіжних прямих. Вихідні проекції точок  $M$  і  $N$  будують зворотним проєкціюванням.

**Завдання 5.2.** Визначити відстань між точкою  $A$  і прямою  $b$  (рис. 5.5).

**Розв'язування.** На проєкціях заданої прямої вибирають проєкції точок  $C$  і  $D$ , площину  $\Pi_2$  замінюють площиною  $\Pi_4$ , яка перпендикулярна до  $\Pi_1$  і паралельна до  $b$  ( $\Pi_1 \perp \Pi_4 \parallel b$ ), проводять  $x_{14} \parallel l_1$ , будують  $C_4, D_4$  і  $A_4$ , через  $C_4$  і  $D_4$  проводять  $b_4$ , площину  $\Pi_1$  замінюють площиною  $\Pi_5$ , яка перпендикулярна до  $b$ , ( $\Pi_4 \perp \Pi_5 \perp b_5$ ) проводять  $x_{45} \perp b_4$ , будують  $C_5, D_5$  і  $A_5$ . На  $\Pi_5$  пряма  $b$  проєкціюється у точку ( $b_5 \equiv C_5 \equiv D_5$ ). Будують відрізок  $A_5C_5$ , який і дорівнює відстані між точкою  $A$  і прямою  $b$ .

**Завдання 5.3.** Визначити натуральну величину трикутника  $ABC$ , який займає загальне положення відносно  $\Pi_1$  і  $\Pi_2$  (рис. 5.6).

**Розв'язування.** Оскільки плоска геометрична фігура проєкціюється в натуральну величину на паралельну до неї площину проєкцій, заданий трикутник шляхом послідовної заміни площин проєкцій переводять спочатку у положення проєкціюючої площини, а потім – у положення площини рівня. При цьому одна з головних ліній площини трикутника стає проєкціюючою прямою.

Отже, у площині заданого трикутника  $ABC(A_1B_1C_1, A_2B_2C_2)$  будують горизонталь  $h(h_1, h_2)$ , площину  $\Pi_2$  замінюють площиною  $\Pi_4$ , яка перпендикулярна до  $h(x_{14} \perp h_1)$ , будують  $A_4, B_4, C_4$ . На  $\Pi_4$  площина заданого трикутника проєкціюється у пряму лінію  $A_4B_4C_4$ . Площину  $\Pi_1$  замінюють площиною  $\Pi_5$ , яка паралельна до трикутника  $ABC$ , проводять  $x_{45} \parallel A_4B_4C_4$  і будують  $A_5B_5C_5$ . На  $\Pi_5$  трикутник  $ABC$  проєкціюється у натуральну величину.

**Завдання 5.4.** Методом заміни площин проєкцій площину загального положення  $\alpha(h_\alpha, f_\alpha)$  перетворити у положення проєкціюючої площини (рис. 5.7) і визначити величину кута нахилу площини  $\alpha$  до  $\Pi_1$ .

**Розв'язування.** Площина, задана слідами, проєкціююча, якщо один з її слідів перпендикулярний до осі проєкцій. Оскільки горизонтальний слід фронтально-проєкціюючої площини завжди перпендикулярний до осі  $x$ , замінюють площину  $\Pi_2$  площиною  $\Pi_4$  і на комплексному кресленні площини  $\alpha$  будують  $x_{14} \perp h_\alpha$ . Для побудови нового фронтального сліду  $f_{\alpha 4}$  на  $f_\alpha$  вибирають довільну точку  $F(F_1, F_2)$ , проводять через  $F_1$  перпендикуляр до  $x_{14}$ , на якому будують  $F_4$ , через  $F_4$  і точку збігу слідів площини  $\alpha$  на осі  $x_{14}$  ( $X_{\alpha 4}$ ) будують слід площини  $\alpha$  на  $\Pi_4$  -  $f_{\alpha 4}$ . Кут  $\phi$  утворений віссю  $x_{14}$  і слідом  $f_{\alpha 4}$  дорівнює куту нахилу площини  $\alpha$  до  $\Pi_1$ .

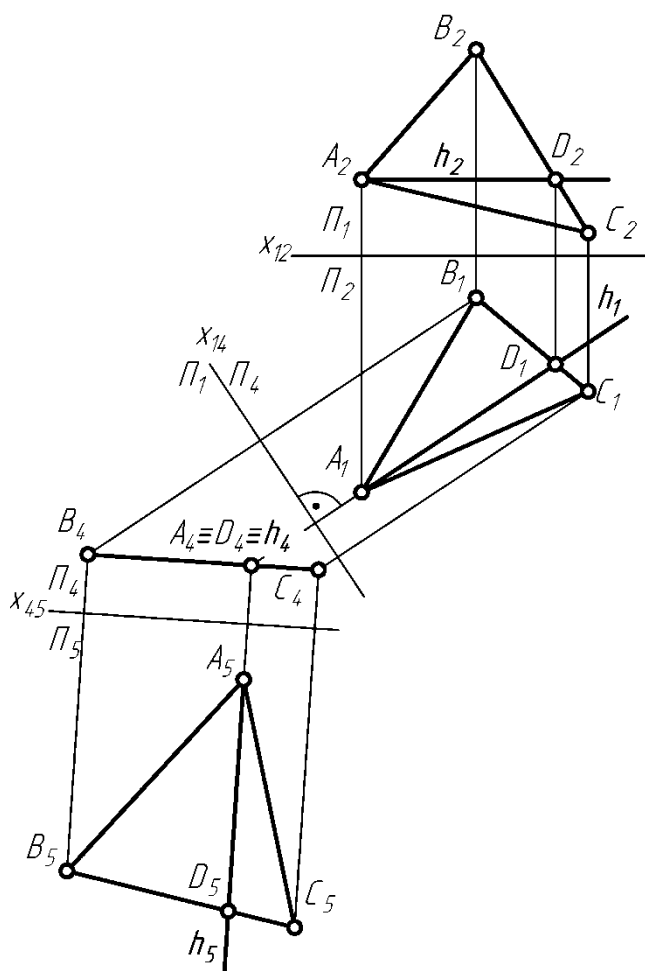


Рис. 5.6

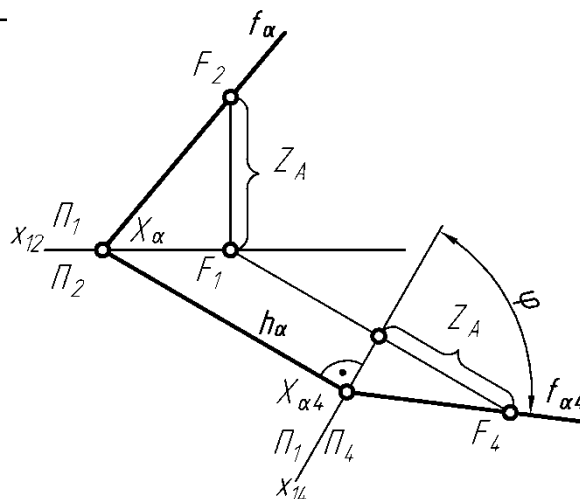


Рис. 5.7

### 5.3. Метод плоскопаралельного переміщення

Перетворення за допомогою плоскопаралельного переміщення полягає у тому, що потрібне розташування геометричної фігури відносно площин проєкцій досягають переміщенням геометричної фігури при незмінній системі площин проєкцій. Під час плоскопаралельного переміщення всі точки геометричної фігури переміщують у площинах між собою паралельних і паралельних до однієї з площин проєкцій, а відстані між точками залишають незмінними.

Якщо геометричну фігуру переміщують паралельно до  $\Pi_1$ , то всі її точки переміщуються у площинах, паралельних до  $\Pi_1$ , тобто фронтальні проєкції всіх її точок переміщуються по фронтальних слідах площин, перпендикулярних до вертикальних ліній проєкційного зв'язку.

Якщо геометричну фігуру переміщують паралельно до  $\Pi_2$ , то всі її точки переміщуються у площинах, паралельних до  $\Pi_2$ , тобто горизонтальні проєкції всіх її точок переміщуються по горизонтальних слідах площин, перпендикулярних до вертикальних ліній проєкційного зв'язку.

Під час плоскопаралельного переміщення геометричну фігуру, яка займає загальне положення відносно системи площин проєкцій переміщують до тих пір, поки вона не прийме особливе положення відносно тієї ж системи площин проєкцій.

Нехай відомі проєкції на  $\Pi_1$  і  $\Pi_2$  відрізка прямої загального положення  $AB(A_1B_1, A_2B_2)$  (рис. 5.8). Використовуючи метод плоскопаралельного переміщення необхідно побудувати натуральну величину  $AB$ .

У результаті переміщення  $AB$  повинен зайняти положення прямої рівня, тобто одна з його проєкцій повинна стати паралельною до осі  $x$ . Отже, на вільному місці аркуша проводять горизонтальну пряму, на якій вибирають  $\bar{A}_1$ , від  $\bar{A}_1$  відкладають  $\bar{B}_1$  ( $A_1B_1 = \bar{A}_1\bar{B}_1$ ). Під час переміщення фронтальні проєкції кінців відрізка переміщуються у фронтальних слідах площин  $\alpha$  і  $\beta$  ( $f_\alpha | f_\beta // x$ ) і знаходяться у проєкційному зв'язку з відповідними горизонтальними проєкціями кінців відрізка. Отже, через  $A_2$  і  $B_2$  проводять  $f_\alpha$  і  $f_\beta$ , через  $\bar{A}_1$  проводять вертикальну лінію проєкційного зв'язку до перетину з  $f_\alpha$  й отримують  $\bar{A}_2$ , через  $B_1$  проводять вертикальну лінію проєкційного зв'язку до перетину з  $f_\beta$  й отримують  $\bar{B}_2$ . Побудована  $\bar{A}_2\bar{B}_2$  являється натуральною величиною відрізка  $AB$ , а кут  $\phi$  дорівнює куту нахилу відрізка  $AB$  до  $\Pi_1$ .

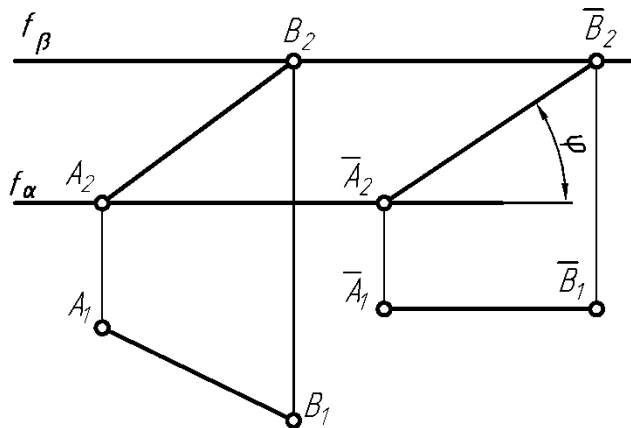


Рис. 5.8

Для визначення форми і дійсних розмірів плоскої фігури необхідно останню поперемінно переміщувати відносно двох площин проєкцій, причому під час першого переміщення фігура займає положення проєкціюючої площини, під час другого переміщення плоска фігура займає положення площини рівня. Для виконання такого плоскопаралельного переміщення необхідно побудувати проєкції однієї з головних ліній площини.

Щоб визначити дійсну величину трикутника  $ABC$  (рис. 5.9) проводять проєкції фронталі  $f(f_1, f_2)$  і площину трикутника  $ABC$  переміщують у горизонтально-проєкціююче положення. В результаті такого переміщення  $f_2$  займає вертикальне положення, а горизонтальна проєкція трикутника ( $\bar{A}_1\bar{B}_1\bar{C}_1$ ) вироджується у пряму лінію.

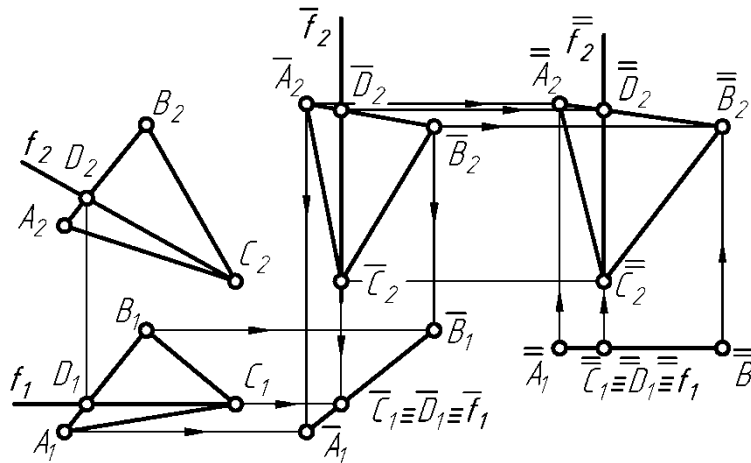


Рис. 5.9

Побудову починають з викреслювання на вільному місці аркуша вертикальної прямої, яка відповідає  $\bar{f}_2$ , вибирають  $\bar{B}_2$  і, використовуючи метод засічок будують  $\bar{A}_2\bar{B}_2\bar{C}_2=A_2B_2C_2$ , за правилами побудови проєкцій точок під час плоскопаралельного переміщення будують  $\bar{A}_1\bar{B}_1\bar{C}_1$ . У результаті переміщення трикутника  $ABC$  у положення площини рівня горизонтальна його проєкція стає паралельною осі  $x$ . Тобто, на вільному місці аркуша викреслюють горизонтальну пряму, на якій, використовуючи метод засічок, будують  $\bar{\bar{A}}_1\bar{\bar{B}}_1\bar{\bar{C}}_1=\bar{A}_1\bar{B}_1\bar{C}_1$ . За правилами побудови проєкцій точок під час плоскопаралельного переміщення будують  $\bar{\bar{A}}_2\bar{\bar{B}}_2\bar{\bar{C}}_2=ABC$ .

#### 5.4. Метод обертання навколо осі перпендикулярної до площини проєкцій (проєкціюючої прямої)

Плоскопаралельне переміщення називають обертанням навколо уявних осей, перпендикулярних до  $\Pi_1$  і  $\Pi_2$ , а обертання навколо проєкціюючих прямих або прямих рівня – окремими випадками плоскопаралельного переміщення. Тому для обертання навколо осі, перпендикулярної до площини проєкцій, характерні всі особливості плоскопаралельного переміщення.

Для виконання обертання геометричної фігури визначають п'ять постійних і два змінних елементи обертання:

- об'єкти обертання – характерні точки геометричної фігури;
- вісь обертання – пряма, навколо якої обертають об'єкт обертання;
- площини обертання – площини, в яких обертають об'єкти обертання, завжди перпендикулярні до осі обертання;
- центри обертання – точки перетину осі обертання з площинами обертання;
- радіуси обертання – відстані від об'єктів обертання до центрів обертання, для виконання обертання визначають натуральні величини радіусів обертання.

До змінних елементів обертання відносять кут і напрям обертання, які залежать від поставленої задачі й умов обертання.

Механізм обертання точки  $A$  зображено на рис. 5.10.

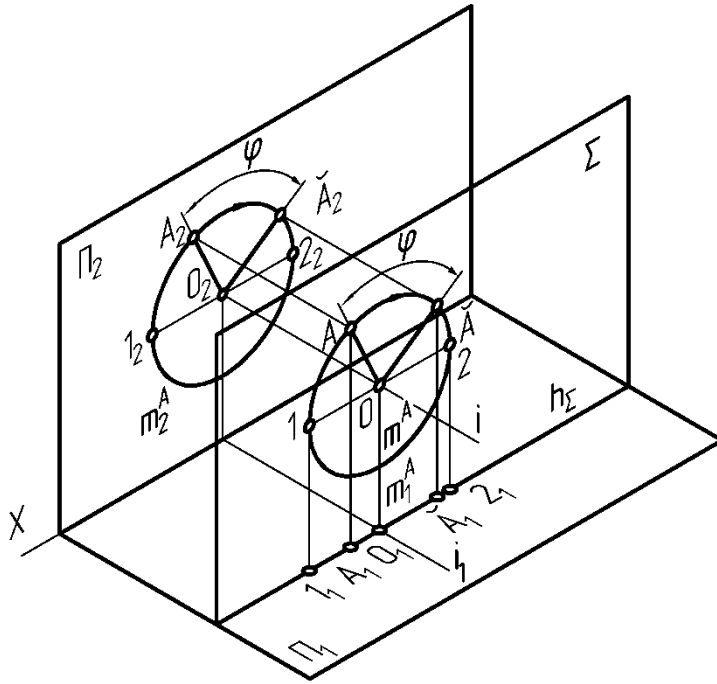


Рис. 5.10

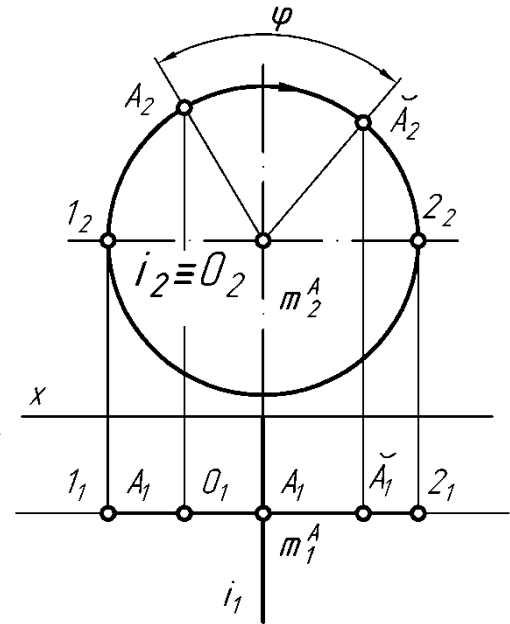


Рис. 5.11

Елементи механізму обертання:

- об'єкт обертання – точка  $A$ ;
- вісь обертання – фронтально-проекціююча пряма  $i$  ( $i \perp \Pi_2$ );
- площина обертання – фронтальна площина  $\Sigma(A \in \Sigma \perp i)$ ;
- центр обертання – точка  $O(i \cap \Sigma = O)$ ;
- радіус обертання  $R = OA$  – під час обертання навколо проекціюючої прямої одна з проекцій радіуса обертання дорівнює його натуральній величині, тому графічно її визначати не потрібно.

Обертаючись, точка  $A$  описує коло  $m$ , яке розташоване у площині  $\Sigma$ . Оскільки площина  $\Sigma$  паралельна до  $\Pi_2$ , фронтальна проекція кола  $m$  дорівнює його натуральній величині ( $m = m_2$ ), а на  $\Pi_1$  коло  $m$  проекціюють у відрізок прямої, який розташований перпендикулярно до  $i_1$  ( $m_1 \perp i_1$ ) на горизонтальному сліді площини  $\Sigma$  ( $h_\Sigma \equiv m_1$ ) (рис. 5.11).

Під час обертання точки  $A$  на кут  $\alpha$ , з положення  $OA$  в положення  $OA_2$ , фронтальна проекція точки  $A$  з положення  $A_2$  переміщається по колу  $m_2$  у положення  $A_2$ -tilde, а горизонтальна проекція з  $A_1$  в  $A_1$ -tilde переміщається по прямій  $m_1$ .

Аналогічні переміщення виконує точка під час обертання навколо горизонтально-проекціюючої осі (рис. 5.12).

Метод обертання навколо осі, перпендикулярної до площини проєкцій, використовують для визначення натуральної величини відрізка  $AB$  прямої загального положення і величини кута його нахилу до площини проєкцій (рис. 5.13). Побудову виконують за описаним вище порядком. Визначають елементи механізму обертання:

- об'єкти обертання – точки  $A(A_1, A_2)$  і  $B(B_1, B_2)$ ;



- вісь обертання – горизонтально-проекціююча пряма  $i(i_1, i_2)$ , для полегшення процесу обертання проводять через один з об'єктів обертання ( $A \in i$ );
- площина обертання – горизонтальна площина  $\beta$  проходить через точку  $B(B_2 \in f_\beta)$ ;
- центр обертання  $O(O_1, O_2)$ ;
- радіус обертання  $R(R_1 = B_1O_1; R_2 = B_2O_2)$ ;
- кут і напрям обертання вибирають так, щоб траєкторія точки  $B$  була мінімальною.

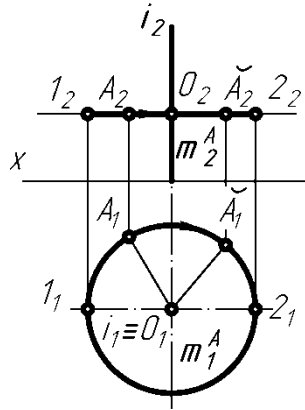


Рис. 5.12

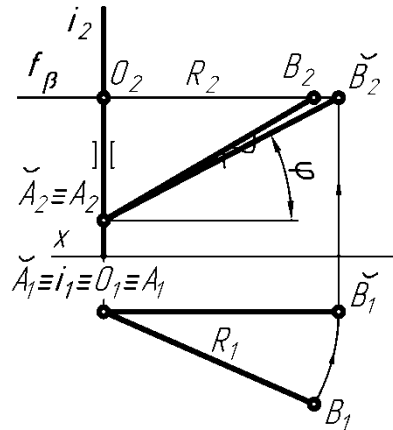


Рис. 5.13

Відрізок  $AB$  повертають до положення фронтальної прямої ( $\check{A}\check{B}_1 // x$ ),  $A$  належить осі обертання, тому  $A_1 \equiv \check{A}_1$ , через  $A_1$  проводять горизонтальну пряму і радіусом  $R = R_1 = B_1O_1$  обертають  $B_1$  до суміщення з горизонтальною прямою, отримують  $\check{B}_1$ , через  $\check{B}_1$  проводять вертикальну лінію проекційного зв'язку до перетину з  $f_\beta$  й отримують  $\check{B}_2$ . Таким чином  $\check{A}_2\check{B}_2 = AB$  – натуральна величина відрізка  $AB$ ,  $\phi$  – величина кута нахилу відрізка  $AB$  до  $\Pi_1$ .

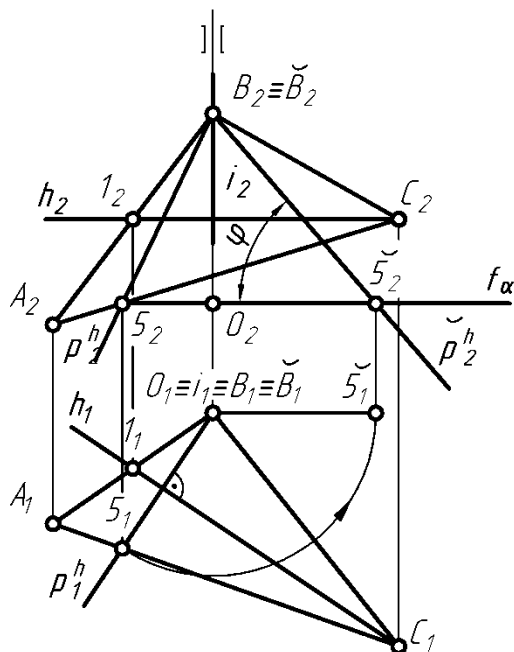
Методом обертання навколо проекціюючої прямої площину, яка займає загальне положення відносно площин проекцій, перетворюють у проекціюючу площину. Для цього одну з головних ліній площини обертають у положення проекціюючої прямої.

Нехай площина задана трьома точками, які не лежать на одній прямій ( $A, B, C$ ) (рис. 5.14). Необхідно, обертаючи задану площину навколо горизонтально проекціюючої прямої  $i(i \perp \Pi_1)$ , перевести у фронтально-проекціююче положення.

Сполучають однойменні проекції точок  $A, B$  і  $C$  прямими лініями. Через точку  $C$  будують горизонталь  $C1(C_2I_2 // x, C_1I_1)$ , через  $C$  проводять вісь обертання  $i$  ( $i_2 \perp x, i_1 \equiv C_1$ ), повертають  $A_1B_1C_1$  до положення, в якому  $C_1I_1$  займе вертикальне положення ( $\check{C}_1\check{I}_1 \perp x$ ),  $\check{C}_1 \equiv C_1$  і  $\check{C}_2 \equiv C_2$  як проекції точки яка лежить на осі обертання, методом засічок. Використовуючи положення точок  $C_1$  і  $I_1$  будують  $\check{A}_1\check{B}_1\check{C}_1 = A_1B_1C_1$ , через  $A_2$  і  $B_2$  будують фронтальні сліди горизонтальних площин  $\alpha$  і  $\beta$ , в яких обертають точки  $A$  і  $B$ , через  $\check{A}_1$

Для перетворення площини загального положення заданої слідами  $\alpha(h_\alpha, f_\alpha)$  (рис. 5.15) у положення проєкціуючої площини (наприклад, горизонтально-проєкціуючої) вибирають фронтально-проєкціуючу вісь обертання  $i$  ( $i \perp \Pi_2$ ), яка б належала  $\Pi_1$  ( $i_1 \perp x$ ,  $i_2 \subset x$ ). Для побудови проєкцій осі обертання  $i$  на  $h_\alpha$  вибирають довільну точку  $O$  ( $O_1 \subset h_\alpha$ ,  $O_2 \subset x$ ), через  $O_1$  проводять  $i_1$  і визначають  $i_2$ , яка збігається з  $O_2$  ( $i_2 \equiv O_2$ ), опускають з  $O_2$  перпендикуляр на  $f_\alpha$ , обертають його основу  $B \equiv B_2$  до суміщення з віссю  $x$  і отримують  $\check{B}_2$ , яка є точкою збігу слідів площини  $\alpha$  у новому положенні. Через  $\check{B}_2$  проводять  $\check{f}_\alpha \perp x$ , через  $O_1$  і  $\check{B}_2 \equiv \check{X}_\alpha$  проводять  $\check{h}_\alpha$ . Таким чином площина  $\alpha$  займає положення горизонтально проєкціуючої площини, а кут  $\varphi$  дорівнює куту нахилу площини  $\alpha$  до  $\Pi_2$ .

**Розв’язування.** Для визначення кута нахилу площини загального положення до однієї з площин проекцій використовують властивості лінії найбільшого нахилу до цієї площини проекцій: лінія найбільшого нахилу – це пряма, яка лежить у заданій площині й перпендикулярна до однойменної головної лінії даної площини; вона визначає кут нахилу заданої площини до однойменної площини проекцій. Отже, кут між лінією найбільшого нахилу до  $\Pi_1$  і площиною проекцій  $\Pi_1$  визначає кут нахилу заданої площини до  $\Pi_1$ .



Через точку  $C$  проводять горизонталь  $h(h_2//x, h_1)$  трикутника  $ABC$ , з  $B_1$  опускають перпендикуляр на  $h_1$ , який є горизонтальною проекцією лінії найбільшого нахилу до  $\Pi_1 (p_1^h)$ . У точці перетину  $p_1^h$  і  $A_1C_1$  отримують точку  $5_1 (p_1^h \cap A_1C_1=5_1)$ , прямим проекціюванням  $5_1$  на  $A_2C_2$  отримують  $5_2$ , через  $B_2$  і  $5_2$  будують фронтальну проекцію лінії найбільшого нахилу до  $\Pi_1 p_2^h$ .

Для отримання натуральної величини шуканого кута необхідно лінію найбільшого нахилу до  $\Pi_1$  повернути в положення фронтальної прямої. Отже, визначають елементи механізму обертання:

- об'єкти обертання – точки  $B(B_1, B_2)$  і  $5(5_1, 5_2)$ ;

- вісь обертання – горизонтально-проекціююча пряма  $i(i_1, i_2)$ , яка проходить через точку  $B$ , тобто  $B_1 \equiv \check{B}_1, B_2 \equiv \check{B}_2$ , як проекції точок, які лежать на осі обертання;

- площина обертання – горизонтальна площина  $\alpha$  фронтальний слід якої проходить через  $5_2 (f_a//x)$ ;

- центр обертання  $O(O_2=i_2 \cap f_a, O_1 \equiv B_1 \equiv i_1)$ ;

- радіус обертання  $R (R_2=O_25_2, R_1=O_15_1=O5)$ ;

- кут і напрям обертання повинні забезпечити суміщення точки  $5_1$  з горизонтальною прямою на вільному місці аркуша.

Через  $B_1$  проводять горизонтальну пряму і радіусом  $R=R_1=O_15_1$  обертають  $5_1$  до суміщення з горизонтальною прямою, отримують  $5_1$ -tilde, через  $5_1$ -tilde проводять вертикальну лінію проекційного зв'язку до перетину з  $f_a$  і отримують  $5_2$ -tilde, сполучають  $5_2$ -tilde і  $\check{B}_2$  й отримують фронтальну проекцію повернутої лінії найбільшого нахилу до  $\Pi_1 p_2^h$ . Таким чином кут  $\phi$  дорівнює натуральній величині кута нахилу площини трикутника  $ABC$  до  $\Pi_1$ .

## 5.5. Метод обертання навколо прямої рівня

Обертання навколо прямої рівня виконують аналогічно обертанню навколо проекціюючої прямої. Але оскільки жодна проекція перпендикуляра до прямої рівня не дорівнює натуральній величині самого перпендикуляра, то проекції траєкторій руху точок не проекціюються без спотворень, а для виконання обертання необхідно визначати натуральні величини радіусів обертання.

Метод обертання навколо прямої рівня використовують для визначення натуральної величини плоскої геометричної фігури. Щоб плоска геометрична фігура стала паралельною до  $\Pi_1$ , її обертають навколо горизонталі, а щоб вона стала паралельною до  $\Pi_2$  – навколо фронталі.

Для визначення натуральної величини трикутника  $ABC(A_1B_1C_1, A_2B_2C_2)$  (рис. 5.17) будують горизонталь  $h(h_2//x, h_1)$ , яку обирають за вісь обертання. Горизонталь  $h$  проходить через точки  $A$  і  $I$ , які в процесі обертання залишаються нерухомими ( $A_I \equiv \check{A}_I, I_I \equiv \check{I}_I$ ). Отже, обертають точку  $B$  в площині  $\alpha$  і точку  $C$  у площині  $\beta$ . Площини обертання перпендикулярні до осі обертання, отже  $h_\alpha \perp h_1$  і  $h_\beta \perp h_1$  і в перетині з нею утворюють центри

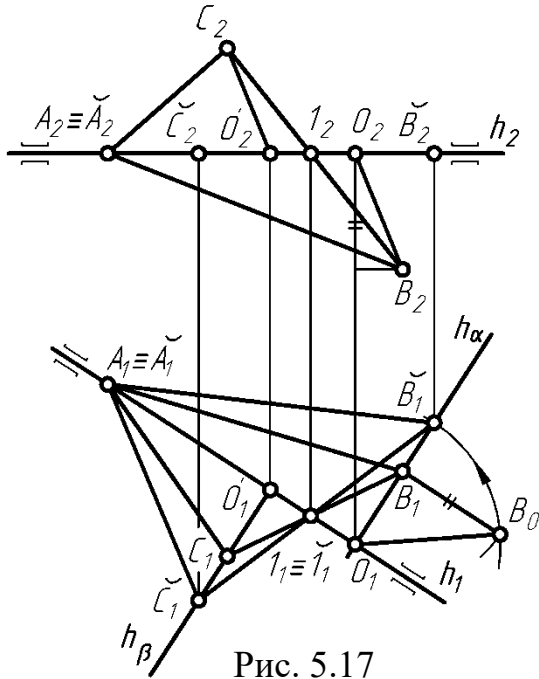


Рис. 5.17

обертання  $O(O_1, O_2)$  і  $O'$  ( $O'_1, O'_2$ ). Для обертання точки  $B$  будують проекції радіуса обертання  $OB(O_1B_1, O_2B_2)$  і визначають його натуральну величину  $O_1B_0$  за правилом прямокутного трикутника. Із точки  $O_1$  як центра радіусом  $O_1B_0$  проводять дугу до перетину з  $h_\alpha$  і отримують  $\check{B}_1$ . Точка  $\check{C}_1$  одночасно належить  $h_\beta$  і прямій  $\check{B}_1\check{I}_1$ . Отже, через  $\check{B}_1$  і  $\check{I}_1$  проводять пряму до перетину з  $h_\beta$  і отримують  $\check{C}_1$ , з'єднують між собою  $\check{A}_I, \check{B}_1, \check{C}_1$  і отримують натуральну величину трикутника  $\check{A}_I\check{B}_1\check{C}_1=ABC$  і дійсні величини його кутів. Фронтальна проєкція повернутого трикутника збігається з фронтальною проєкцією осі обертання ( $\check{A}_2\check{B}_2\check{C}_2 \equiv h_2$ ).

Обертання навколо слідів площини розглядають як окремий випадок обертання навколо прямої рівня і називають методом суміщення. Метод суміщення використовують для визначення натуральних величин геометричних фігур, які лежать у площинах загального положення заданих слідами, або побудови у цих площинах фігур, які мають певну конфігурацію і розміри.

Суть методу у тому, що площину загального положення  $\alpha$  за допомогою обертання навколо одного зі слідів приводять у таке положення, коли вона повністю збігається з однойменною площиною проєкцій. При цьому слід, як вісь обертання не змінює свого положення. Тому для побудови суміщеного положення площини  $\alpha$  досить побудувати положення тільки однієї точки, яка належить площині, виключаючи ті точки, які належать сліду.

Нехай площину  $\alpha(h_\alpha, f_\alpha)$  необхідно повернути навколо  $h_\alpha$  до суміщення з  $\Pi_1$  (рис. 5.18). Для спрощення геометричних побудов вибирають

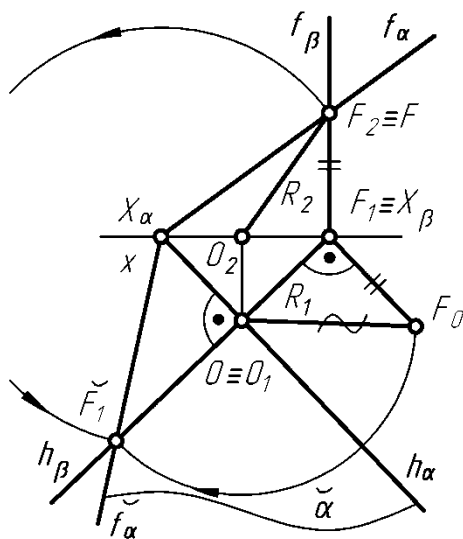


Рис. 5.18

точку, яка належить фронтальному сліду площини ( $F \in f_\alpha$ ). Будують проекції точки  $F$  ( $F_2 \equiv F \in f_\alpha$ ,  $F_1 \in x$ ), визначають проекції радіуса обертання ( $F_1 F_0 = F_2 F_1$ ,  $F_0 O_2 = R$ ). З центра  $O \equiv O_1$  радіусом  $R$  описують дугу до перетину з  $h_\beta$  й отримують суміщене положення точки  $F$  – точку  $\tilde{F}_1$ .  $\tilde{F}_2$  можна отримати обертаючи  $F_2$  навколо  $X_\alpha$ . Через  $X_\alpha$  і  $\tilde{F}_1$  будують  $\tilde{f}_\alpha$  – суміщене положення сліду  $f_\alpha$  й отримують  $\tilde{\alpha}$  суміщене положення площини  $\alpha$ .

**Завдання 5.6.** Способом суміщення площини  $\alpha$  з площиною проєкцій  $\Pi_1$  визначити дійсну величину трикутника  $ABC$ ,

який лежить у площині  $\alpha$  (рис. 5.19).

**Розв’язування.** Через  $A$ ,  $B$  і  $C$  проводять горизонталі площини  $\alpha$   $h^A$  ( $h_1^A, h_2^A$ ),  $h^B$  ( $h_1^B, h_2^B$ ),  $h^C$  ( $h_1^C, h_2^C$ ), суміщають площину  $\alpha$  з площиною  $\Pi_1$ , обертанням навколо  $h_\alpha$  будують на  $\tilde{f}_\alpha$  точки  $\tilde{F}_1^A, \tilde{F}_1^B, \tilde{F}_1^C$ , через які проходять суміщені проекції горизонталей  $\tilde{h}_1^A \parallel \tilde{h}_1^B \parallel \tilde{h}_1^C \parallel h_\alpha$ . Через  $A_1, B_1$  і  $C_1$  проводять перпендикуляри до  $h_\alpha$  до перетину з  $\tilde{h}_1^A, \tilde{h}_1^B, \tilde{h}_1^C$  й отримують суміщені положення вершин трикутника  $\tilde{A}_1, \tilde{B}_1, \tilde{C}_1$ , сполучають побудовані точки й отримують дійсну величину трикутника  $\tilde{A}_1 \tilde{B}_1 \tilde{C}_1$ .

**Завдання 5.7.** Способом суміщення площини  $\beta$  з  $\Pi_2$  побудувати проєкції рівностороннього трикутника  $ABC$ , який лежить у площині  $\beta$ , за відомою горизонтальною проєкцією його сторони  $A_1 B_1$  (рис. 5.20).

**Розв’язування.** За ознакою належності точок площині будують фронтальні проєкції точок  $A(A_2)$  і  $B(B_2)$ , суміщають площину  $\beta$  з площиною  $\Pi_2$ , обертанням навколо  $f_\beta$  будують на  $h_\beta$  точки  $H^A, H^B$ , через які проводять суміщені проєкції фронталей  $\tilde{f}_2^A \parallel \tilde{f}_2^B \parallel f_\beta$ . Через  $A_2$  і  $B_2$  проводять перпендикуляри до  $f_\beta$  до перетину з  $\tilde{f}_2^A$  і  $\tilde{f}_2^B$  й отримують суміщені

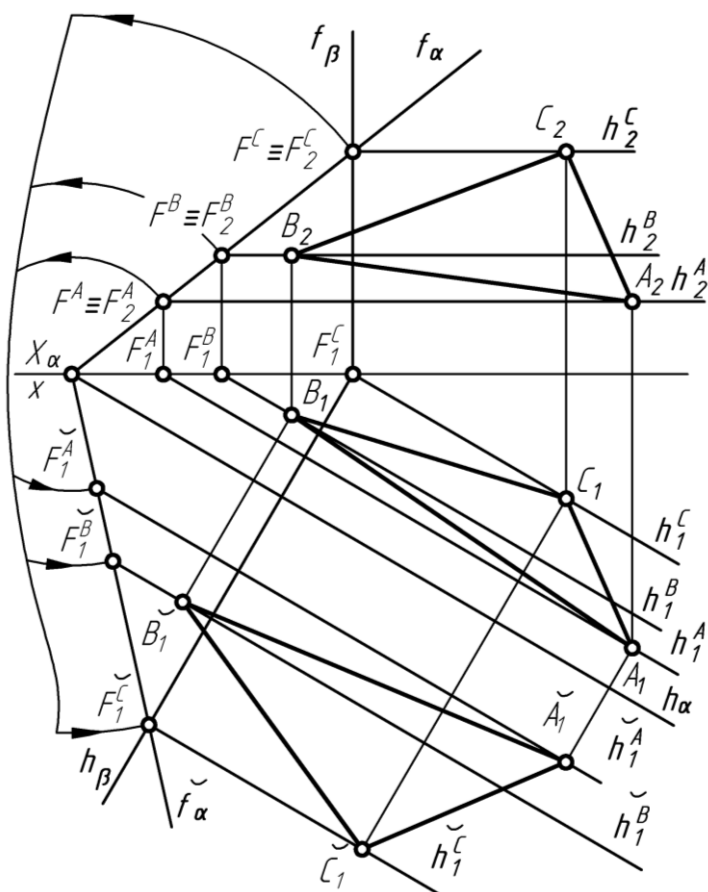


Рис. 5.19

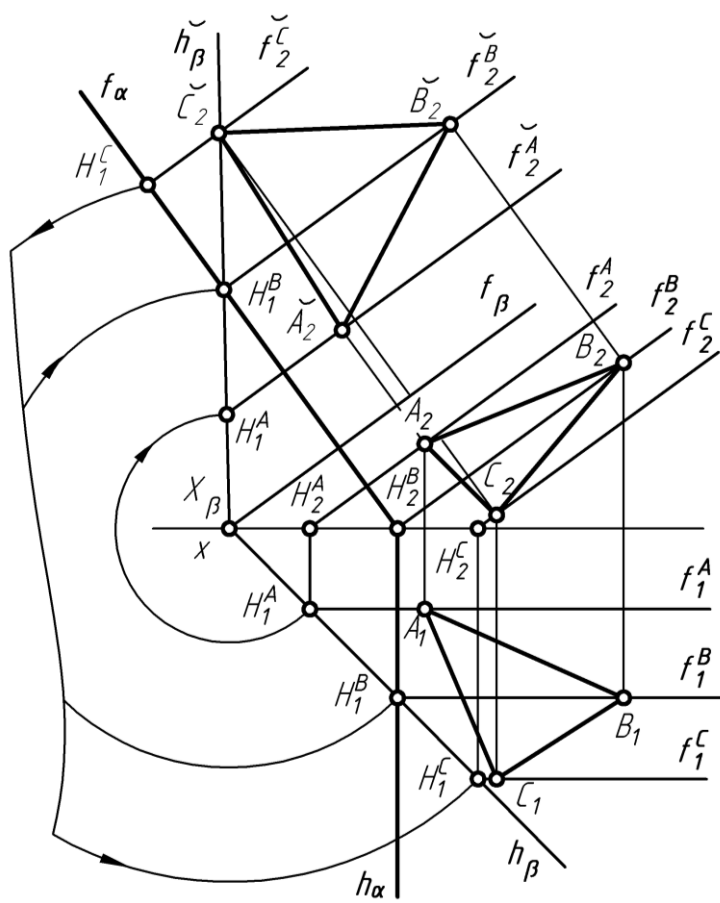


Рис. 5.20

положення точок  $\check{A}_2, \check{B}_2$ , сполучають побудовані точки й отримують  $\check{A}_2\check{B}_2$  – дійсну величину сторони рівностороннього трикутника. Методом засічок на базі сторони  $\check{A}_2\check{B}_2$  будують рівносторонній трикутник  $\check{A}_2\check{B}_2\check{C}_2$ . Через  $\check{C}_2$  проводять суміщену проекцію фронталі  $\check{f}_2^C // f_\beta$  до перетину з  $\check{h}_\beta$  й отримують  $\check{H}_1^C$ , обертають  $\check{H}_1^C$  до суміщення з  $h_\beta$  й отримують  $H_1^C$ , через  $H_1^C$  проводять  $\check{f}_1^C // x$ . Через  $\check{C}_2$  проводять перпендикуляр до  $f_\beta$  до перетину з  $f_2^C$  і отримують  $C_2$ , через  $C_2$  проводять вертикальну лінію проекційного з'язку до перетину з  $f_1^C$  і отримують  $C_1$ . Сполучають однойменні проекції точок  $A, B, C$  й отримують проекції рівностороннього трикутника  $ABC(A_1B_1C_1, A_2B_2C_2)$ .

## 5.6. Визначення натуральних величин кутів між геометричними фігурами

В інженерній графіці відомі кути між двома прямими, між прямою і площиною, між двома площинами. Якщо вказані геометричні фігури займають загальне положення відносно площин проекцій, то на жодну з площин проекцій кути між ними не проєктуються у натуральні величини. Тому для визначення натуральних величин кутів між геометричними фігурами використовують методи перетворення проєкцій.

Не паралельні між собою прямі можуть перетинатися або бути мимобіжними. Кут між мимобіжними прямими дорівнює куту між прямими, які перетинаються і відповідно паралельні до даних мимобіжних прямих. Прямі, які перетинаються, задають площину. Тому визначення натуральної величини кута між двома прямими загального положення, які перетинаються, проводять аналогічно визначенню натуральної величини плоскої геометричної фігури (трикутника).

**Завдання 5.8.** Визначити натуральну величину кута  $\varphi$  між відрізками мимобіжних прямих  $AB$  і  $SC$  (рис. 5.21).

**Розв'язування.** Через точку  $B$  проводять пряму  $l$  паралельну до  $SC$  ( $l_1 // S_1C_1, l_2 // S_2C_2$ ). Кут між  $AB$  і  $SC$  дорівнює куту між  $AB$  і  $l$ , величину якого визначають обертанням навколо лінії рівня.

Через  $A$  будують горизонталь  $h(h_2 // x, h_1)$  і приймають її за вісь обертання. Через  $B_1$  проводять горизонтальний слід площини обертання для точки  $B(h_\beta \perp h_1)$ , будують проєкції центра обертання точки  $B(O_1 = h_\beta \cap h_1, O_2 \in h_2)$ , методом прямокутного трикутника визначають

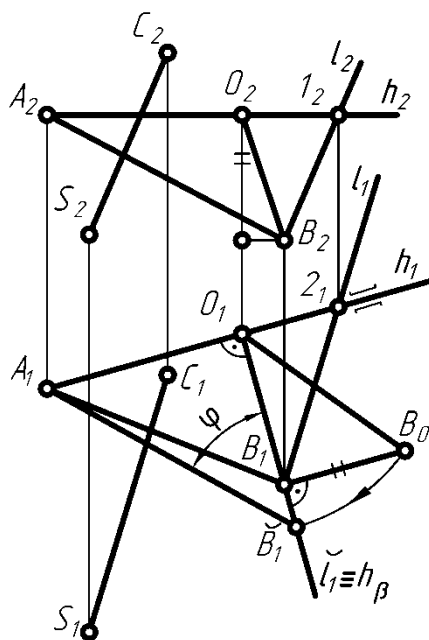


Рис. 5.21

натуральну величину радіуса обертання  $r=O_1B_0$ , обертають  $B_1$  у положення  $\check{B}_1$ . Кут  $A_1\check{B}_1B_1=\varphi$  є шуканий.

Під кутом між прямою і площиною розуміють гострий кут між прямою та її ортогональною проекцією на цю площину. Вказаний кут розміщений при точці перетину прямої з площиною. Тому побудова його проекцій часто технічно складна або неможлива. Якщо визначають натуральну величину кута без зображення його проекцій то розв'язок спрощують шляхом визначення кута між прямою і перпендикуляром до площини (рис. 5.22), а шуканий кут знаходять за допомогою рівняння  $\varphi=90^\circ-\Psi$ .

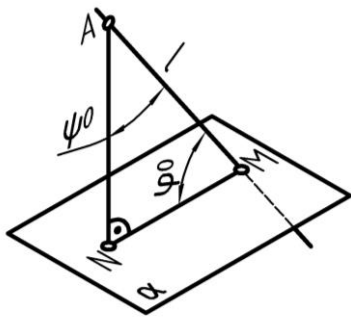


Рис. 5.22

**Завдання 5.9.** Визначити натуральну величину кута між прямою  $l$  та площиною  $\alpha(ABC)$  (рис. 5.23).

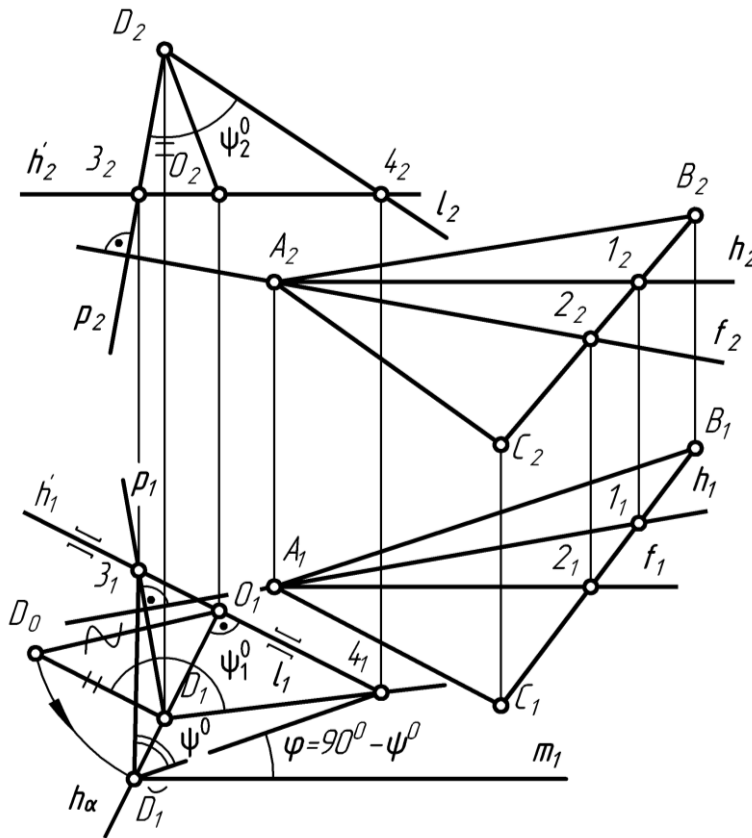


Рис. 5.23

**Розв'язування.** Будують проекції горизонталі  $h(h_1, h_2)$  і фронталі  $f(f_1, f_2)$  заданої площини, на прямій  $l(l_1, l_2)$  вибирають довільну точку  $D(D_1, D_2)$ , з якої будують проекції перпендикуляра до площини  $p(p_1 \perp h_1, p_2 \perp f_2)$ . Кут  $\Psi$  між  $l$  і  $p$  є доповнювальним до шуканого. Натуральну величину його визначають за описаною вище методикою, повертаючи у положення паралельне до однієї з площин проекцій. Для цього будують проекції горизонталі  $h'$  ( $h'_1, h'_2$ ) й обертають навколо неї точку  $D$  у положення  $\check{D}_1$ . Кут  $3_1\check{D}_14_1$  дорі-



вноє натуральній величині доповнювального кута  $\Psi$ . Тому через  $\check{D}_1$  проводять перпендикуляр  $m_1$  до  $3_1\check{D}_1$  ( $m_1 \perp 3_1\check{D}_1$ ) й отримують натуральну величину шуканого кута  $\varphi$ .

**Завдання 5.10.** Визначити натуральну величину кута між прямою  $a$  та площиною  $\beta(h_\beta, f_\beta)$  (рис. 5.24).

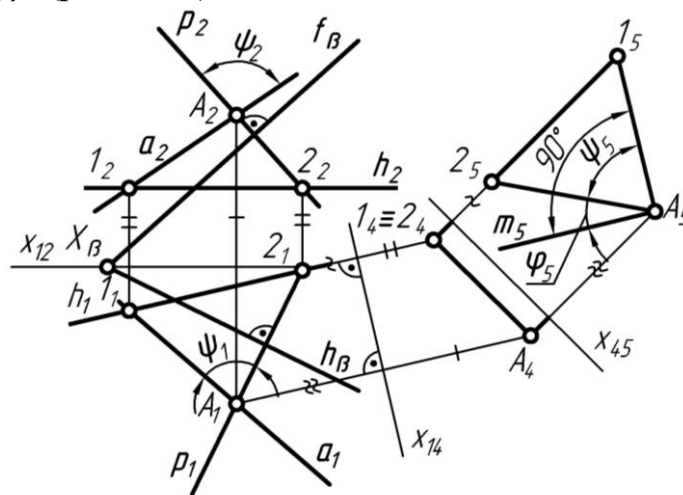


Рис. 5.24

**Розв'язування.** На прямій  $a(a_1, a_2)$  вибирають довільну точку  $A(A_1, A_2)$  і проводять через неї перпендикуляр до  $\beta p(p_1 \perp h_\beta, p_2 \perp f_\beta)$ . Кут між  $a$  і  $p$   $\Psi$  ( $\Psi_1, \Psi_2$ ) є доповнювальним до шуканого. Натуральну величину його визначають з допомогою методу заміни площин проєкцій. З цією метою проводять у площині кута горизонталь  $h(h_1, h_2)$  і замінюють  $\Pi_2$  на  $\Pi_4$  за умовою  $\Pi_4 \perp h$ . Тобто на вільному місці будують  $x_{14} \perp h_1$  і отримують проєкції точок  $A, I, 2$  на  $\Pi_4(A_4, I_4, 2_4)$ .

Площина кута  $\Psi$  спроекціювалася на  $\Pi_4$  у пряму лінію, адже вона стала проєкціюючою до  $\Pi_4$ . Замінюють  $\Pi_1$  на площину  $\Pi_5$  паралельну до площини кута  $\Psi$ . Тобто на вільному місці будують  $x_{45} \parallel A_4 I_4 2_4$  й отримують  $A_5 I_5 2_5$ . Отриманий кут  $I_5 A_5 2_5$  дорівнює натуральній величині доповнювального кута  $\Psi$ . Тому через  $A_5$  проводять перпендикуляр  $m_5$  до  $I_5 A_5$  ( $m_5 \perp I_5 A_5$ ) і отримують натуральну величину шуканого кута  $\varphi$ .

Кут між двома площинами називають двограним і вимірюють лінійним гострим кутом, який утворюють прямі перерізу граней з площиною, перпендикулярною до ребра двогранного кута. Такий лінійний кут проєкціюється в натуральну величину на площину, перпендикулярну до ребра двогранного кута. Отже, якщо відома лінія взаємного перерізу двох площин, то величину кута між ними визначають з допомогою методу заміни площин проєкцій, зробивши дану лінію взаємного перерізу проєкціюючою прямою. Якщо ребро двогранного кута на кресленні не задано, задачу розв'язують шляхом побудови перпендикулярів до заданих площин через довільно вибрану точку у просторі.

**Завдання 5.11.** Визначити натуральну величину двогранного кута  $\varphi$  при ребрі  $BC$  піраміди  $SABC$  (рис. 5.25).

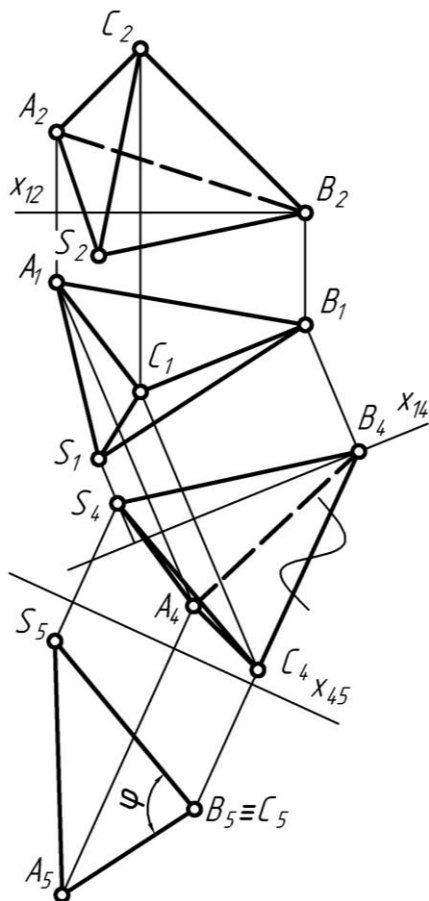


Рис. 5.25

побудована, вибирають довільну точку  $B(B_1, B_2)$  і будують проєкції перпендикулярів до заданих площин  $p(p_1 \perp h_\alpha, p_2 \perp f_\alpha)$  і  $p'(p'_1 \perp h_\beta, p'_2 \perp f_\beta)$ . Отримані проєкції лінійного кута між прямими  $p$  і  $p'$  дорівнюють проєкціям шуканого двогранного кута  $\varphi(\varphi_1, \varphi_2)$ .

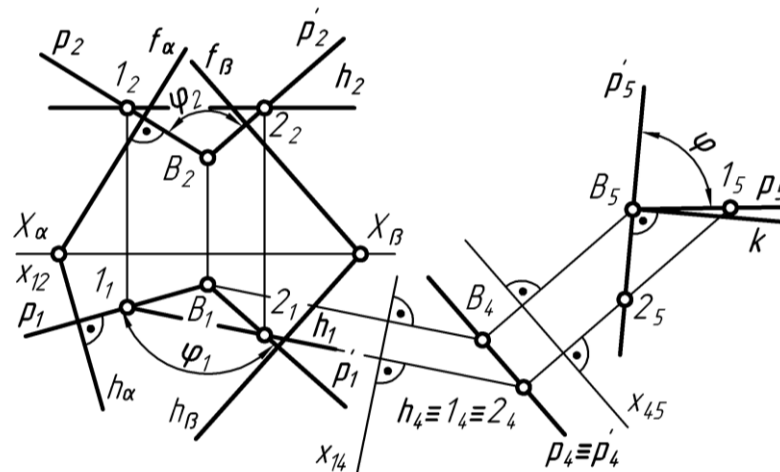


Рис. 5.26

З допомогою методу заміни площин проєкцій площину отриманого кута  $\varphi$  розташовують паралельно до площини  $\Pi_5$ . Для цього будують проєкції горизонталі  $h(h_1, h_2)$  і заміняють  $\Pi_2$  на  $\Pi_4$ , за умовою  $\Pi_4$  перпендикулярна до площини кута  $\varphi$ .

**Розв'язування.** Оскільки ребро  $BC(B_1C_1, B_2C_2)$  є лінією взаємного перерізу площин  $ABC(A_1B_1C_1, A_2B_2C_2)$  і  $SBC(S_1B_1C_1, S_2B_2C_2)$  використовують заміну площин проєкцій і перетворюють його спочатку у пряму рівня, а потім у проєкціюючу пряму. Для спрощення побудови  $x_{12}$  проводять через  $B_2$ .  $\Pi_2$  заміняють на  $\Pi_4$  за умовою  $\Pi_4 // B_1C_1$  й отримують проєкцію заданої піраміди на  $\Pi_4(S_4A_4B_4C_4)$ .

Заміняють  $\Pi_1$  на  $\Pi_5$  за умовою  $\Pi_5 \perp BC$ . Тобто на вільному місці будують  $x_{45} \perp B_4C_4$  і отримують проєкцію заданої піраміди на  $\Pi_5(S_5A_5B_5C_5)$ . Оскільки ребро  $BC$  спроекційоване в точку ( $B_5 \equiv C_5$ ), а кожна з розглядуваних граней – у пряму лінію ( $A_5S_5, B_5S_5$ ), то отриманий кут  $\varphi$  дорівнює натуральній величині двогранного кута при ребрі  $BC$  піраміди  $SABC$ .

**Завдання 5.12.** Визначити натуральну величину двогранного кута  $\varphi$  між площинами  $\alpha(h_\alpha, f_\alpha)$  і  $\beta(h_\beta, f_\beta)$ , які задані слідами (рис. 5.26).

**Розв'язування.** Оскільки на кресленні лінія взаємного перерізу заданих площин не

Тобто на вільному місці будують  $x_{14} \perp h_1$  і отримують проекцію площини кута  $\varphi$ , вироджену у пряму ( $p_4 \equiv p'_4$ ,  $h \equiv l_4 \equiv 2_4$ ). Замінюють  $\Pi_1$  на  $\Pi_5$  за умовою  $\Pi_5$  паралельна до площини кута  $\varphi$ . Тобто на вільному місці будують  $x_{45} // p_4 \equiv p'_4$  й отримують проекцію площини кута  $\varphi$  на  $\Pi_5 (p_5 \cap p'_5)$ , яка дорівнює натуральній величині двогранного кута  $\varphi$  між заданими площинами.

**Завдання 5.13.** Визначити натуральну величину двогранного кута  $\varphi$ , утвореного площинами  $\alpha(ABC)$  і  $\beta(a//b)$  (рис. 5.27).

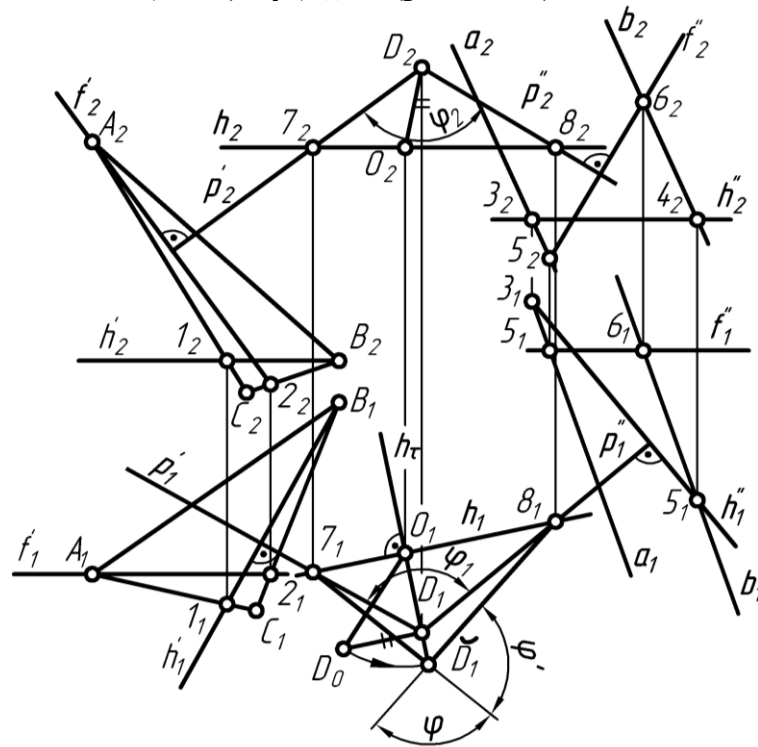


Рис. 5.27

**Розв'язування.** На кресленні лінія взаємного перетину заданих площин не побудована. Тому вибирають у просторі довільну точку  $D(D_1, D_2)$ , будують проекції горизонталі площини  $\alpha h'$  ( $h'_2 // x, h'_1$ ), фронталі площини  $\alpha f'$  ( $f'_1 // x, f'_2$ ), горизонталі площини  $\beta h''$  ( $h''_2 // x, h''_1$ ), фронталі площини  $\beta f''$  ( $f''_1 // x, f''_2$ ), перпендикуляра до площини  $\alpha p'$  ( $p'_1 \perp h'_1, p'_2 \perp f'_2$ ) і перпендикуляра до площини  $\beta p''$  ( $p''_1 \perp h''_1, p''_2 \perp f''_2$ ). Отримані проекції лінійного кута між прямими  $p'$  і  $p''$  дорівнюють проекціям шуканого двогранного кута  $\varphi(\varphi_1, \varphi_2)$ .

Натуральну величину кута  $\varphi$  визначають, використовуючи метод обертання навколо горизонталі  $h(h_2 // x, h_1)$ , яка розміщена в площині кута  $\varphi$ . Обертання виконують аналогічно випадку, описаному у завданні 5.8.

Через  $D_1$  проводять горизонтальний слід площини обертання для точки  $D(h_\tau \perp h_1)$ , будують проекції центра обертання точки  $D(O_1 = h_\tau \cap h_1, O_2 \in h_2)$ , методом прямокутного трикутника визначають натуральну величину радіуса обертання  $r = O_1 D_0$ , обертають  $D_1$  у положення  $\tilde{D}_1$ . Отриманий

кут  $7_1D_18_1$  тупий, отже шуканий кут між площинами  $\alpha$  і  $\beta$  дорівнює  $\varphi' = 180 - \varphi$ .

## Розділ 6

### Проекціювання поверхонь

#### 6.1. Визначення, утворення, класифікація поверхонь

Поверхню представляють як спільну частину двох суміжних областей простору. В інженерній графіці поверхню розглядають як неперервну сукупність послідовних положень лінії, яка переміщується за певним законом. Під час утворення поверхні лінія може залишатися незмінною або змінювати свою форму. Лінію, яка утворює поверхню, називають твірною і позначають буквою  $p$ . Закон переміщення твірної на кресленні представляють у вигляді напрямної лінії і позначають буквою  $m$  (рис. 6.1). Якщо твірні й напрямні лінії поміняти місцями, поверхня не зміниться.

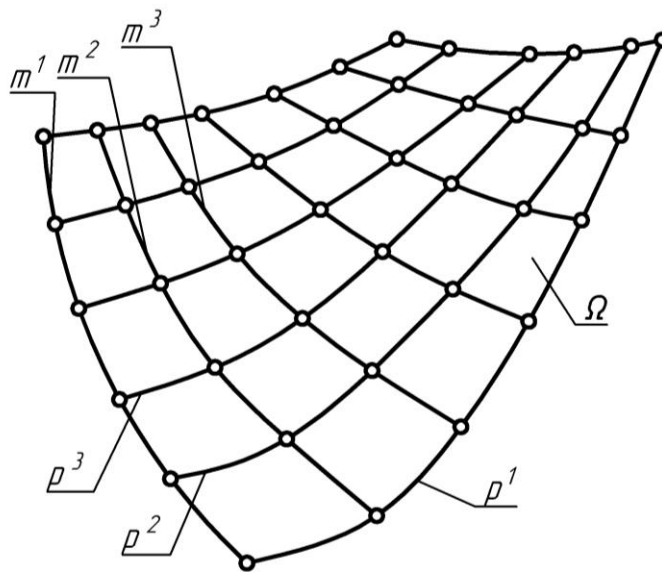


Рис. 6.1

Для спрощення процесу дослідження поверхонь їх класифікують. За основу класифікації поверхонь беруть спільні ознаки і властивості. Класифікація найбільш відомих на цей час поверхонь наведена на рис. 6.2.

Поверхні поділяють на плоскі, гранні й криві. Плоскі поверхні називають площинами і утворюють рухом прямих твірних ліній уздовж напрямних прямих ліній. Гранні поверхні утворюють з кривих шляхом заміни кривих напрямних ліній ламаними лініями.

До кривих поверхонь відносять поверхні обертання, лінійчасті і нелінійчасті поверхні.

Поверхні обертання утворюють прямі або криві твірні лінії під час їхнього обертання навколо нерухомої осі. Лінійчасті поверхні утворюють прямі твірні лінії. Нелінійчасті поверхні утворюють криві твірні лінії.

До лінійчатих поверхонь відносять розгортвані та нерозгортвані поверхні. Розгортвані поверхні можна сумістити з площиною (розгорнути) без розривів і складок. Сумістити з площиною (розгорнути) нерозгортвані поверхні можна тільки наближено.



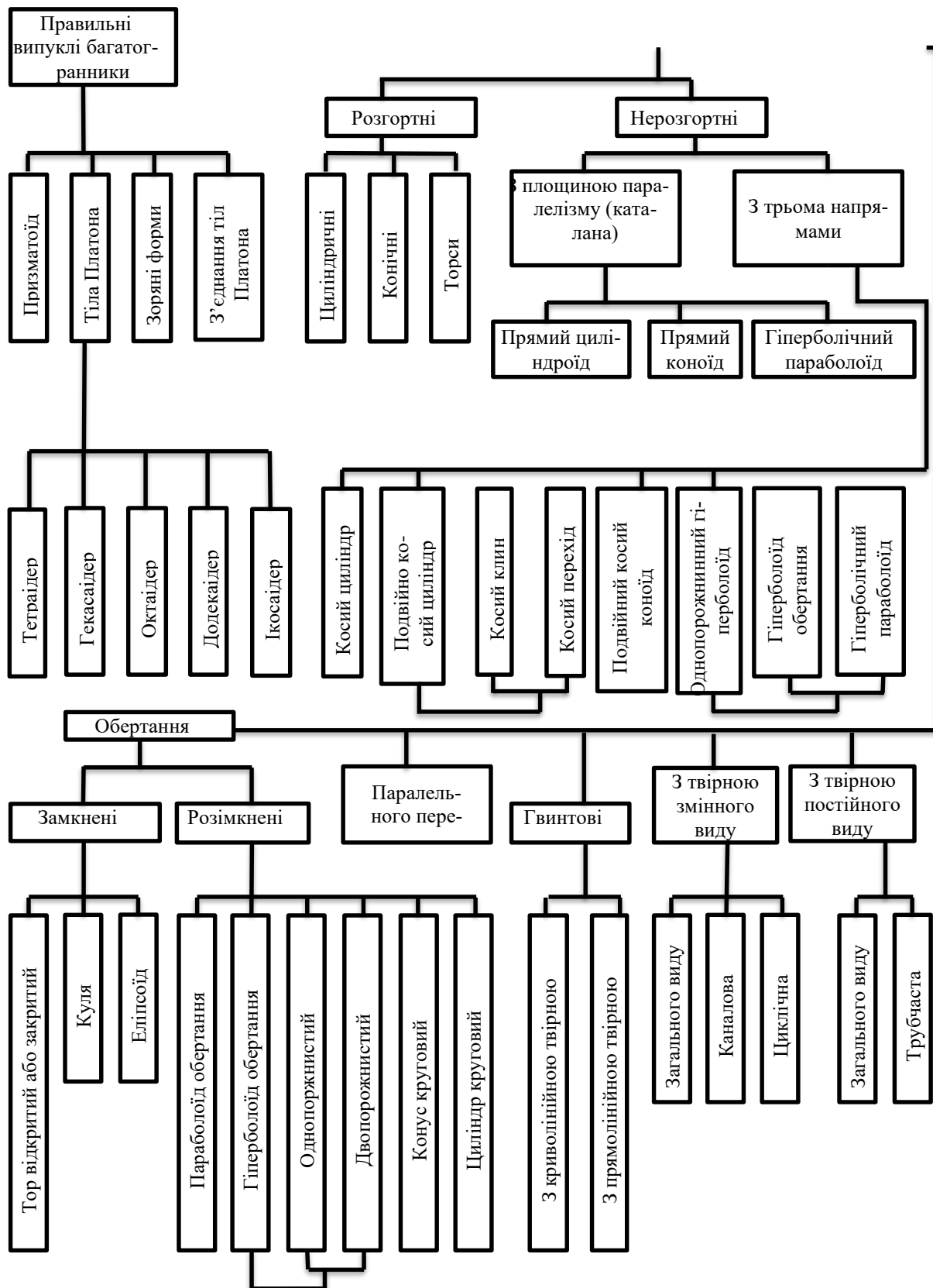


Рис. 6.2

До розгортуваних поверхонь відносять циліндричні, конічні й торси. У нашому випадку розглядають конічні і циліндричні поверхні, а також гранні поверхні, які їм відповідають – піраміди і призми.

Конусом називають поверхню, утворену прямою  $p$ , яка ковзає по нерухомій напрямній кривій  $m$  і має одну нерухому точку  $S$ , яку називають вершиною (рис. 6.3). На кресленні конічну поверхню задають проекціями вершини  $S(S_1, S_2)$  і сліду  $m(m_1, m_2)$ , який можна розглядати як напрямну лінію.

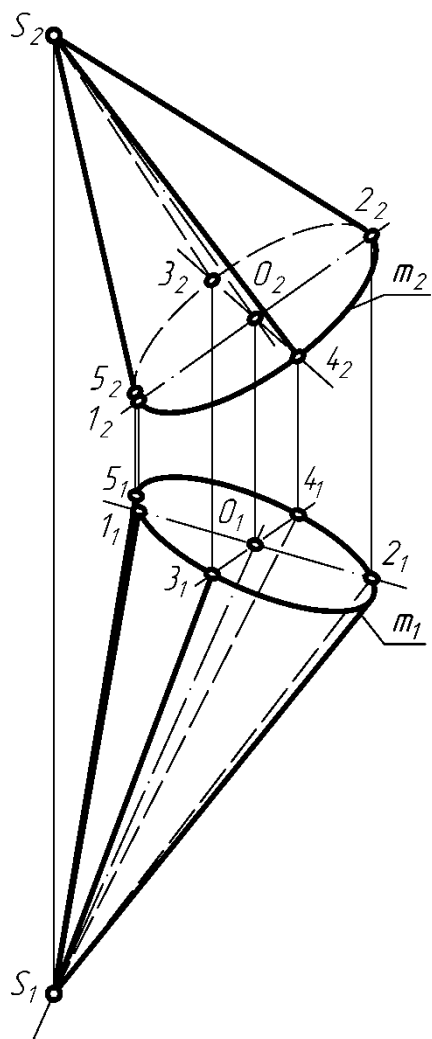


Рис. 6.3

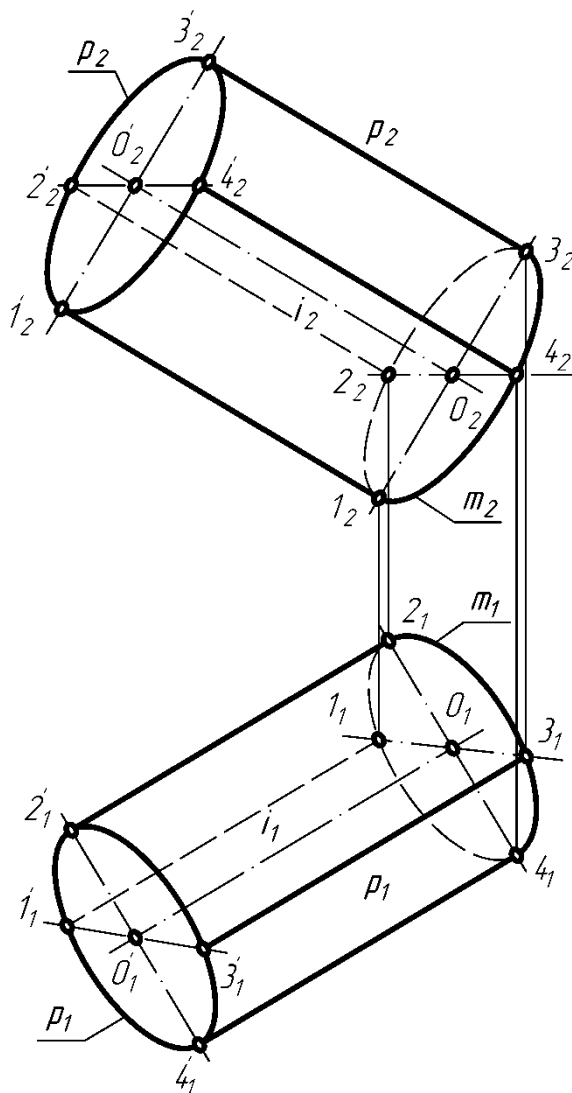


Рис. 6.4

Якщо вершину  $S$  відвести на нескінченно велику відстань, то конус перетворюється у циліндр. Циліндром називають поверхню, утворену твірною  $p$ , яка ковзає по напрямній кривій  $m$  і під час свого переміщення залишається паралельною заданому напрямку  $s$  (рис. 6.4). На кресленні циліндричну поверхню задають проекціями її сліду  $m(m_1, m_2)$ , осі  $i(i_1, i_2)$  і твірної  $p(p_1, p_2)$ .

Конус перетворюють у піраміду, замінюючи напрямну криву ламаною лінією, яка складається з прямолінійних ланок (рис. 6.5). На кресленні

піраміду задають проекціями вершини  $S(S_1, S_2)$  і проекціями напямної ламаної лінії  $m(m_1, m_2)$ , або проекціями точок перетину напямної ламаної лі-

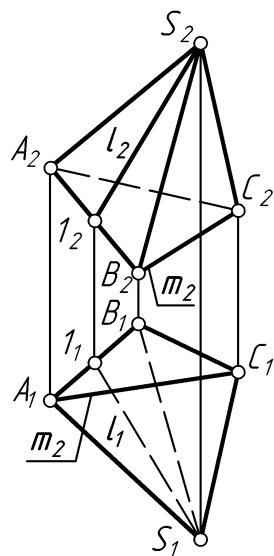


Рис. 6.5

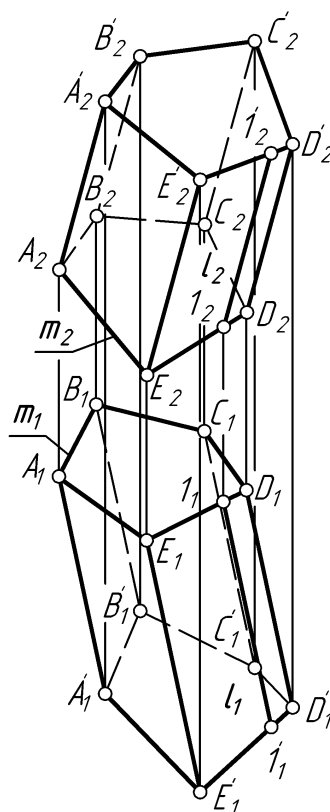


Рис. 6.6

нії з боковими ребрами піраміди.

Циліндр перетворюють у призму, замінюючи напямну криву ламаною лінією, яка складається з прямолінійних ланок (рис. 6.6). На кресленні призму задають проекціями напямної ламаної лінії  $m(m_1, m_2)$  і бокових ребер призми.

## 6.2. Побудова проекцій точок і ліній, які належать поверхням геометричних тіл

Поверхня задана, якщо можна побудувати будь яку кількість точок, які їй належать. В інженерній графіці для розв'язування ряду практичних задач використовують способи побудови проекцій точок, які належать заданим поверхням. До таких задач відносять побудову проекцій точок перетину прямих з поверхнями, побудову проекцій ліній взаємного перетину поверхонь та інші. Побудову проекцій точок, які належать поверхням, проводять з допомогою ліній, які належать поверхням та січним площинам. В якості прикладів розглянемо побудову проекцій точок, які належать поверхням піраміди, призми, конуса, циліндра і сфери.

Нехай задана шестигранна пряма піраміда з основою  $ABCDEF$  ( $A_1B_1C_1D_1E_1F_1$ ,  $A_2B_2C_2D_2E_2F_2$ ,  $A_3B_3C_3D_3E_3F_3$ ) і вершиною  $S(S_1, S_2, S_3)$  (рис. 6.7). Основа піраміди паралельна до  $\Pi_1$ . Необхідно побудувати проекції точки  $K$ , яка належить боковій поверхні піраміди і відома її фронтальна проекція  $K_2$ .



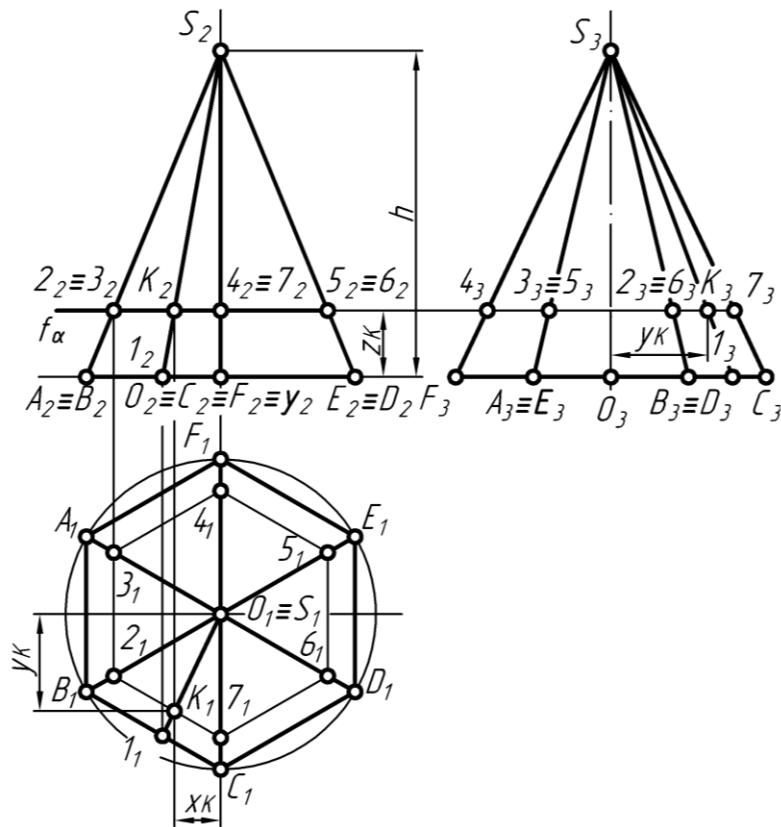


Рис. 6.7

Точка  $K$  належить бічній грані  $BSC$ , яка займає загальне положення відносно площин проекцій. Тому для побудови  $K_1$  використовують побудову проекцій прямої, яка належить площині  $BSC$  і проходить через точку  $K$ . Через  $S_2$  і  $K_2$  проводять пряму до перетину з  $B_2C_2$  ( $S_2K_2 \cap B_2C_2 = I_2$ ), прямим проекціюванням  $I_2$  на  $B_1C_1$  отримують  $I_1$  горизонтальну проекцію прямої, на якій розміщена точка  $K$ , прямим проекціюванням  $K_2$  на  $S_1I_1$  отримують  $K_1$ . Профільну проекцію точки  $K$  будують використовуючи правило побудови третьої проекції за двома відомими.

Для розв'язування даної задачі можна використовувати січну площину-посередник. Січні площини-посередники у кожному випадку вибирають із розрахунку отримання найпростішого розв'язування задачі. У нашому випадку використовують горизонтальну січну площину  $\alpha$ , фронтальний слід якої  $f_\alpha$  проходить через  $K_2$  і перетинає бокові ребра піраміди в точках 2, 3, 4, 5, 6, 7, отримують  $2_2, 3_2, 4_2, 5_2, 6_2, 7_2$ , прямим проекціюванням на горизонтальні проекції відповідних ребер піраміди отримують  $2_1, 3_1, 4_1, 5_1, 6_1, 7_1$ , прямим проекціюванням  $K_2$  на  $2_13_1$  отримують  $K_1$ , використовуючи правило побудови третьої проекції за двома відомими будують  $K_3$ .

Побудову проекцій точки, яка лежить на поверхні призми виконують аналогічно. Нехай задана тригранна пряма призма з нижньою основою  $ABC(A_1B_1C_1, A_2B_2C_2, A_3B_3C_3)$  і верхньою основою  $A'B'C'(A'_1B'_1C'_1,$

$A_2^1 B_2^1 C_2^1, A_3^1 B_3^1 C_3^1$ ) (рис. 6.8). Необхідно побудувати проєкції точки  $K$ , яка належить боковій поверхні призми і відома її фронтальна проєкція  $K_2$ .

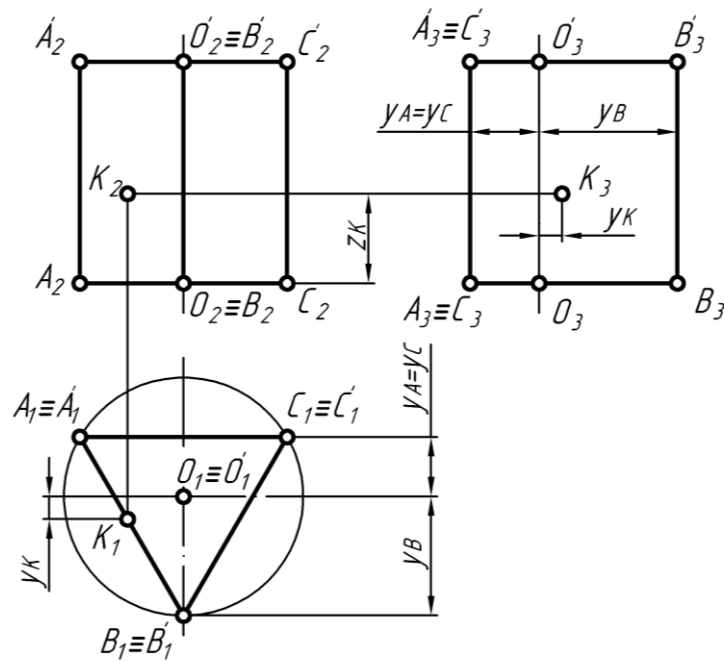


Рис. 6.8

Точка  $K$  належить бічній грані  $ABA'B'$ , яка перпендикулярна до  $\Pi_1$  і горизонтальна її проєкція вироджується у пряму  $A_1B_1$ . Отже, прямим проєкціюванням  $K_2$  на  $A_1B_1$  отримують  $K_1$ . Профільну проєкцію точки  $K$  будують використовуючи правило побудови третьої проєкції точки за двома відомими.

Аналогічно розв'язують задачі, якщо точки лежать на поверхнях конуса або циліндра.

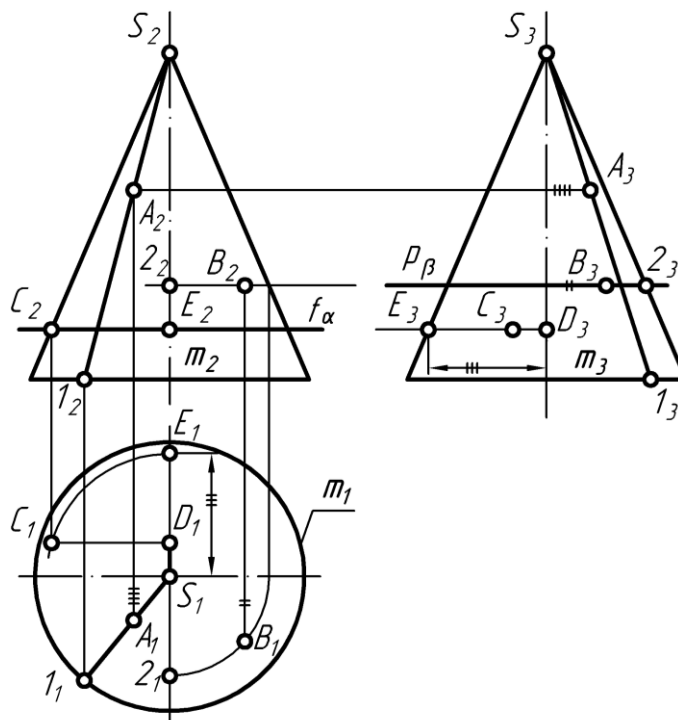


Рис. 6.9

Нехай на поверхні прямого кругового конуса, заданого напрямною лінією  $m(m_1, m_2, m_3)$  і вершиною  $S(S_1, S_2, S_3)$  розміщені точки  $A, B, C$  (рис. 6.9). Необхідно побудувати проєкції точок, якщо відомі фронтальна проєкція точки  $A(A_2)$ , горизонтальна проєкція точки  $B(B_1)$  і профільна проєкція точки  $C(C_3)$ .

Побудову виконують аналогічно розглянутим вище випадкам з урахуванням, що вказані точки лежать на кривих поверхнях. Отже для їх побудови використовують проєкції положень твірних ліній.

Для побудови проєкцій точки  $A$  через  $S_2$  і  $A_2$  проводять проєкцію твірної до перетину з основою й отримують точку  $I_2(S_2A_2 \cap m_2 = I_2)$ . Прямим проєкціюванням  $I_2$  на  $m_1$  отримують  $I_1$ , сполучають  $I_1$  і  $S_1$ , прямим проєкціюванням  $A_2$  на  $S_1I_1$  отримують  $A_1$ ,  $A_3$  будують використовуючи правило побудови третьої проєкції точки за двома відомими.

Для побудови проєкцій точок  $B$  і  $C$  доцільно використовувати січні площини, які проходять через вказані точки і паралельні до основи конуса. Такі січні площини перерізають круговий конус по колах, центри яких лежать на осі симетрії конуса. Шукані проєкції точок отримують прямим проєкціюванням на проєкції даних кіл.

На кресленні циліндр задають проєкціями напрямної лінії  $m(m_1, m_2)$  і крайніх положень твірної, паралельних між собою (рис. 6.10). Для побудови проєкцій точки  $A$ , якщо відома її фронтальна проєкція  $A_2$ , через  $A_2$  проводять фронтальну проєкцію проміжного положення твірної  $l$  до перетину з основою й отримують точку  $I_2(l_2 \cap m_2 = I_2)$ . Прямим проєкціюванням  $I_2$  на  $m_1$  отримують  $I_1$ , через  $I_1$  проводять  $l_1$  – горизонтальну проєкцію проміжного положення твірної  $l$ , прямим проєкціюванням  $A_2$  на  $l_1$  отримують  $A_1$ .

Під час побудови проєкцій точок, які розташовані на поверхні сфери, використовують особливість перерізу сфери січною площиною. Фігурою такого перерізу завжди є коло. Якщо січна площина паралельна до однієї з площин проєкцій, то на дану площину проєкцій коло проєкціюється у натуральну величину, а проєкція

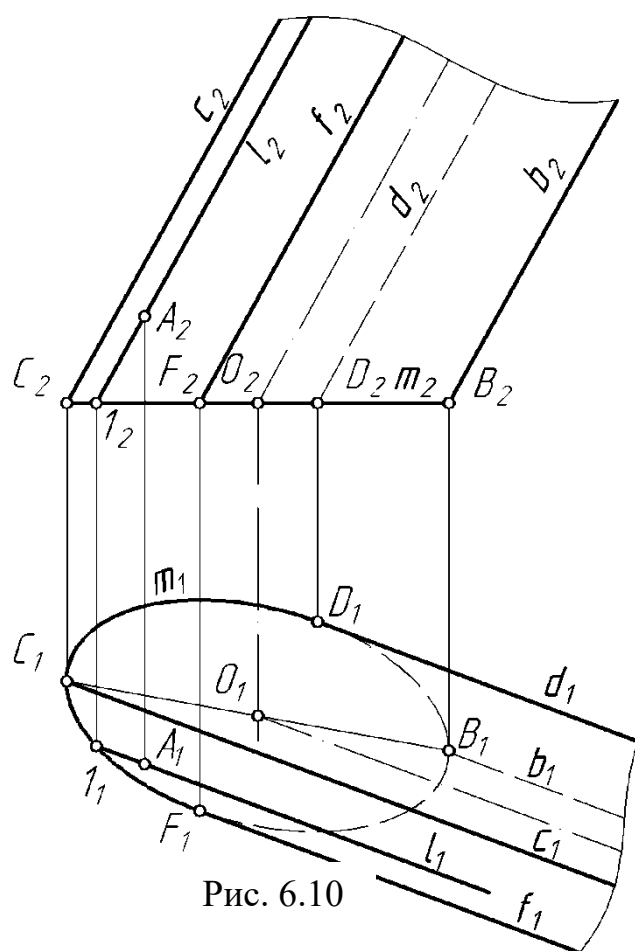
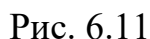


Рис. 6.10



Нехай сфера задана центром  $O(O_1, O_2)$  і радіусом  $R$  (рис. 6.11). Необхідно побудувати фронтальну проекцію точки  $A$ , якщо відома її горизонтальна проекція  $A_1$ .

Для побудови використовують горизонтальну січну площину  $\alpha$ , яка перерізає сферу по колу  $a$  радіусом  $O_1A_1$ . Щоб побудувати фронтальну проекцію кола  $a$  на  $a_1$  виділяють точку  $I_1$ , фронтальна проекція якої  $I_2$  лежить на фронтальній проекції обрису сфери. Через  $I_2$  проводять фронтальний слід січної площини  $f_\alpha$ , прямим проєкціюванням  $A_1$  на  $f_\alpha$  отримують  $A_2$ .

В інженерній графіці часто виникає необхідність побудови геометричних форм окремих частин складних геометричних фігур і визначення їх натуральних величин. Для розв'язання таких задач використовують перерізи поверхонь проекціюючими площинами (косі перерізи). В результаті перерізу поверхні площиною утворюється плоска фігура, яку називають перерізом. Вказаний переріз одночасно належить поверхні й січній площині. Методика побудови лінії перерізу поверхні площиною така ж, як і методика побудови лінії перетину двох площин. Тобто переріз можна будувати способом ребер, який передбачає багаторазове розв'язування задачі на перетин прямої з площиною, або способом граней, який передбачає багаторазове розв'язування задачі на побудову лінії перетину двох площин. Спосіб граней доцільно використовувати, коли деякі грані є проекціюючими площинами. В окремих випадках доцільно використовувати комбінацію способу ребер і способу граней.

Нехай задана чотиригранна пряма піраміда з основою  $ABCD$  ( $A_1B_1C_1D_1$ ,  $A_2B_2C_2D_2$ ) і вершиною  $S(S_1, S_2)$  перерізна фронтальною проекціюючою січною площиною  $\alpha(f_\alpha)$ . Необхідно побудувати проекції та натуральну величину фігури перерізу (рис. 6.12).

Фронтальна проекція фігури перерізу збігається із фронтальним слідом січної площини  $f_\alpha$ . Отже фронтальні проекції характерних точок фігури перерізу є точками перетину проекцій ребер з  $f_\alpha$  ( $A_2S_2 \cap f_\alpha = 1_2$ ,  $B_2S_2 \cap f_\alpha = 2_2$ ,  $C_2S_2 \cap f_\alpha = 3_2$ ,  $D_2S_2 \cap f_\alpha = 4_2$ ). Прямим проєкціюванням фронтальних проєкцій характерних точок на горизонтальні проєкції відповідних ребер отримують  $1_1 2_1 3_1 4_1$  – горизонтальну проєкцію фігури перерізу піраміди фронтально-проєкціуючою площиною.

Натуральну величину фігури перерізу будують методом обертання навколо проєкціуючої прямої, яка проходить через точку  $I$ . В результаті обертання отримують  $\tilde{1}_1 \tilde{2}_1 \tilde{3}_1 \tilde{4}_1$  – натуральну величину фігури перерізу.

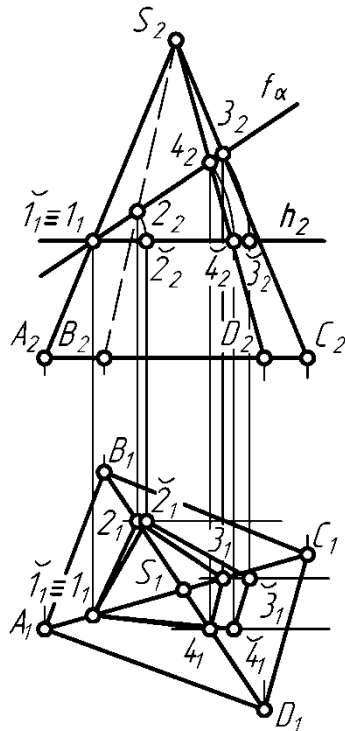


Рис. 6.12

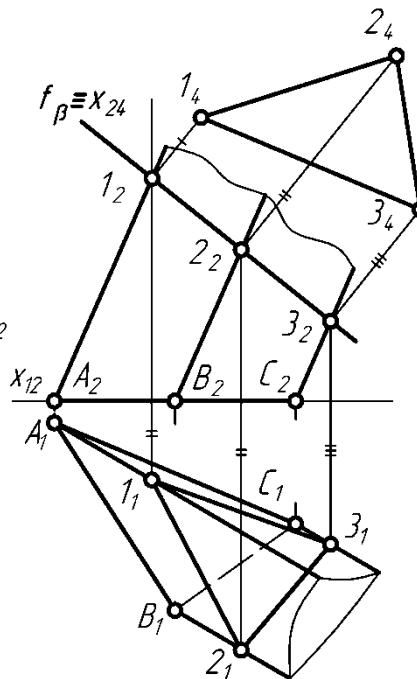


Рис. 6.13

Побудову проєкцій фігури перерізу тригранної похилої призми фронтально-проєкціуючою площиною  $\beta(f_\beta)$  (рис. 6.13) виконують аналогічно. Для побудови натуральної величини фігури перерізу використовують метод заміни площин проєкцій. Під час такої заміни  $\Pi_1$  заміняють площиною  $\Pi_4$ , яка перерізає площину  $\Pi_2$  по осі проєкцій  $x_{24}$ , паралельній до  $f_\beta$ . Для забезпечення компактності розміщення зображень  $f_\beta \equiv x_{24}$ . Виконуючи відомі побудови, отримують  $1_1 2_1 3_1 4_1$  – натуральну величину фігури перерізу призми проєкціуючою площиною.

Якщо січна площина перерізає криву поверхню, то фігуру перерізу обмежує крива лінія. Побудову проєкції такої кривої виконують шляхом побудови проєкцій точок, які належать одночасно поверхні і січній площині, або шляхом побудови проєкцій точок перетину твірних поверхні з січною площиною. Побудову проєкцій точок, які належать поверхні, виконують за розглянутою вище методикою і використовують для цього площини-посередники. Така побудова складна і трудомістка. Тому для побудови проєкцій

перерізів лінійчастих поверхонь використовують проекції твірних, які проходять через характерні точки кривих перерізу. Для визначення положення характерних точок кривих перерізу враховують, що форма кривої перерізу залежить від взаємного розміщення поверхні й січної площини.

В результаті перерізу кругового конуса проекціюючими січними площинами (рис. 6.14) отримують: еліпс – якщо площина  $\alpha(f_\alpha)$  перерізає всі твірні конуса й нахилена до його осі; коло – якщо площина  $\beta(f_\beta)$  перпендикулярна до осі конуса; точку – якщо площина  $\gamma(f_\gamma)$  проходить через вершину конуса і не перетинає його основу, двійну пряму – якщо площина  $\delta(f_\delta)$  дотична до бокової поверхні конуса; параболу – якщо площина  $\epsilon(f_\epsilon)$  паралельна до однієї твірної конуса; трикутник – якщо площина  $\lambda(f_\lambda)$

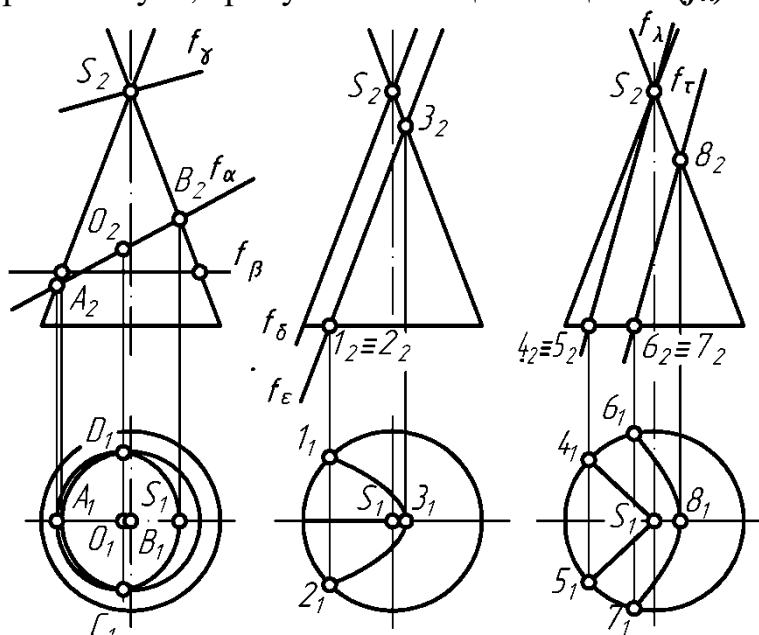


Рис. 6.14

проходить через вершину конуса й перетинає його основу; гіперболу – якщо площина  $\pi(f_\pi)$  паралельна до будь якого можливого положення площини  $\lambda$  (паралельна до двох твірних конуса).

Нехай похилий круговий конус заданий вершиною  $S(S_1, S_2)$  і прямою лінією  $m(m_1, m_2)$  з центром  $O(O_1, O_2)$  і радіусом  $R$  (рис. 6.15). Необхідно побудувати проекції та натуральну величину фігури перерізу конуса площиною  $\alpha(f_\alpha)$ .

В результаті аналізу взаємного розміщення поверхні конуса й січної площини визначають, що фігура перерізу – еліпс, оскільки січна площина перерізає всі твірні конуса і не паралельна до його основи. Для побудови проекцій еліпса достатньо побудувати проекції його великої і малої осей і використати один із методів побудови еліпса, наприклад, метод паралелограма.

Оскільки конус перерізаний фронтально-проекціуючою площиною, фронтальна проекція фігури перерізу вироджується у пряму лінію і збігається з фронтальним слідом  $f_\alpha$  січної площини. Кінці великої осі еліпса є

найвищою  $1$  і найвищою  $2$  точками перерізу і для побудови їх проекцій використовують положення твірної  $SA$  і  $SB$  ( $S_2A_2 \cap f_\alpha = 1_2$ ,  $S_2B_2 \cap f_\alpha = 2_2$ ), прямим проєкціюванням  $1_2$  на  $S_1A_1$  отримують  $1_1$ , прямим проєкціюванням  $2_2$  на  $S_1B_1$  отримують  $2_1$ .

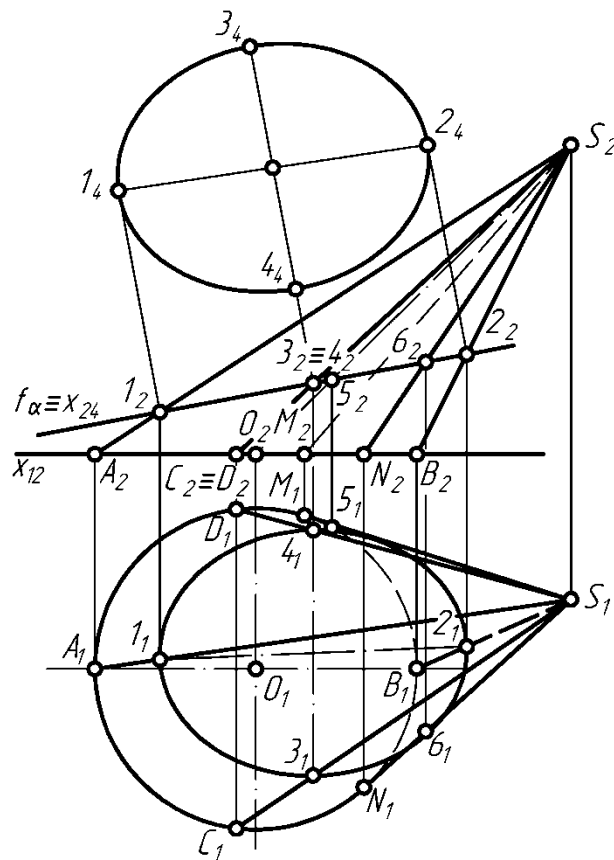


Рис. 6.15

Відомо, що велика і мала осі еліпса взаємно перпендикулярні і в точці перетину діляться навпіл. Отже фронтальна проекція малої осі еліпса вироджується у точку  $3_2 \equiv 4_2$ , яка ділить  $1_2 2_2$  на дві дорівнюють частини. Через  $S_2$  і  $3_2 \equiv 4_2$  проводять фронтальну проекцію положень твірної  $S_2C_2 \equiv S_2D_2$ , прямим проєкціюванням  $C_2 \equiv D_2$  на  $m_1$  отримують  $C_1$  і  $D_1$ , сполучають  $C_1$  і  $D_1$  з  $S_1$  і отримують горизонтальні проекції положень твірної конуса, які проходять через точки  $3$  і  $4$ , прямим проєкціюванням  $3_2$  на  $S_1C_1$  отримують  $3_1$ , прямим проєкціюванням  $4_2$  на  $S_1D_1$  отримують  $4_1$ .

Для забезпечення правильності побудови проекцій фігури перерізу визначають проекції точок дотику фігури перерізу до крайніх положень твірної конуса на горизонтальній проекції (граничних точок видимості горизонтальної проекції фігури перерізу). Через вказані точки проходять  $SM(S_1M_1)$  і  $SN(S_1N_1)$ , прямим проєкціюванням  $M_1$  і  $N_1$  на  $m_2$  отримують  $M_2$  і  $N_2$  сполучають  $M_2$  і  $N_2$  з  $S_2$  і визначають  $5_2$  і  $6_2$  ( $S_2M_2 \cap f_\alpha = 5_2$ ,  $S_2N_2 \cap f_\alpha = 6_2$ ), прямим проєкціюванням  $5_2$  на  $S_1M_1$  отримують  $5_1$ , прямим проєкціюванням  $6_2$  на  $S_1N_1$  отримують  $6_1$ . Використовуючи метод паралелограма, будують горизонтальну проекцію фігури перерізу.

Для побудови натуральної величини фігури перерізу використовують метод заміни площин проекцій. Під час такої заміни  $\Pi_1$  замінюють площиною  $\Pi_4$ , яка перерізає площину  $\Pi_2$  по осі проекцій  $x_{24}$ , паралельній до  $f_\alpha$ . Використовуючи відомі побудови, отримують нові проекції великої і малої осей еліпса, які дорівнюють натуральній їх величині. З допомогою методу прямокутника будують натуральну величину фігури перерізу.

В результаті перерізу кругового циліндра проекціюючими площинами (рис. 6.16) отримують: еліпс – якщо площина  $\alpha(f_\alpha)$  перерізає всі твірні циліндра і не паралельна до основи; частину еліпса – якщо площина  $\beta(f_\beta)$  перерізає твірну циліндра і його основу; дві вітки еліпса – якщо площина  $\gamma(f_\gamma)$  перерізає основи циліндра і не паралельна до його твірних; коло – якщо площина  $\delta(f_\delta)$  перерізає всі твірні циліндра і паралельна до його основи; двійну пряму – якщо площина  $\epsilon(f_\epsilon)$  дотична до бокової поверхні циліндра; прямокутник (паралелограм) – якщо площина  $\lambda(f_\lambda)$  перерізає основи прямого (похилого) циліндра і паралельна до його твірних.

Нехай прямий круговий циліндр висотою  $H$  заданий напрямною лінією  $m(m_1, m_2)$  з центром  $O(O_1, O_2)$  і радіусом  $R$  (рис. 6.17). Необхідно побудувати проекції та натуральну величину фігури перерізу циліндра площиною  $\beta(f_\beta)$ .

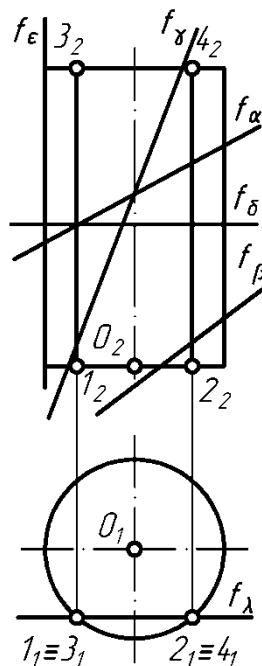


Рис. 6.16

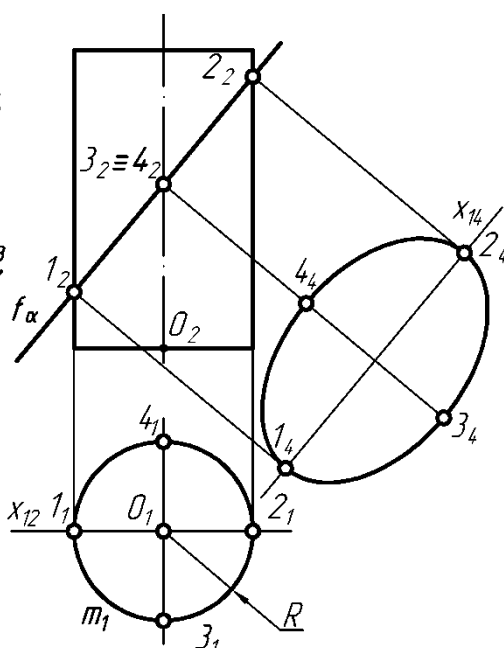


Рис. 6.17

У результаті аналізу взаємного розміщення поверхні циліндра і січної площини визначають, що фігура перерізу – еліпс, оскільки січна площина перерізає всі твірні циліндра і не паралельна до основи. Побудову виконують аналогічно розглянутому вище випадку. Під час виконання побудови доцільно звернути увагу на те, що горизонтальна проекція фігури перерізу накладається на горизонтальну проекцію прямого циліндра, якщо його основа паралельна до  $\Pi_1$ , а мала вісь еліпса дорівнює діаметру циліндра.



## 6.4. Побудова проєкцій точок перетину прямих ліній з поверхнями

Порядок побудови проєкцій точок перетину прямих ліній з поверхнями аналогічний порядку розв'язування задач на побудову проєкцій точок перетину прямих ліній з площинами. Тобто у загальному випадку необхідно:

1. Через пряму провести допоміжну січну площину.
2. Побудувати проєкції фігури перерізу заданої поверхні з допоміжною січною площиною.
3. Визначити проєкції точок перетину побудованої фігури перерізу із заданою прямою.

Допоміжна січна площина повинна перерізати задану поверхню по лінії, яку легко будувати. Як правило, в якості допоміжних січних площин використовують проєкціюючі площини. Але в деяких випадках доцільніше використовувати площини загального положення, які перерізають задані поверхні по простих лініях.

Нехай задана тригранна пряма піраміда з основою  $ABC(A_1B_1C_1, A_2B_2C_2)$  і вершиною  $S(S_1, S_2)$ , яку перетинає пряма  $l(l_1, l_2)$  (рис. 6.18). Необхідно побудувати проєкції точок перетину прямої з поверхнею піраміди.

Відповідно до наведеного вище порядку розв'язування таких завдань проводять через  $l$  допоміжну січну фронтально-проєкціюючу площину  $\alpha(f_\alpha \equiv l_2)$  і будують проєкції фігури перерізу площини  $\alpha$  з заданою пірамідою  $123(1_12_13_1, 1_22_23_2)$ . Пряма  $l$  і побудований трикутник перерізу лежать в одній площині  $\alpha$ , а сторони трикутника належать поверхні піраміди. Отже точки  $M(1_12_1 \cap l_1 = M_1)$  і  $N(2_13_1 \cap l_1 = N_1)$  є шуканими точками перерізу прямої з поверхнею піраміди.

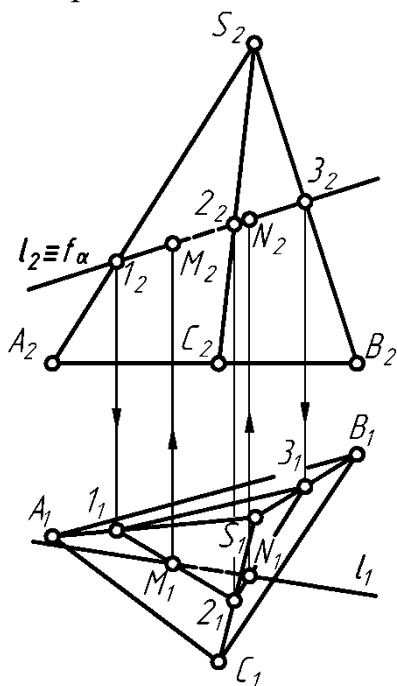


Рис. 6.18

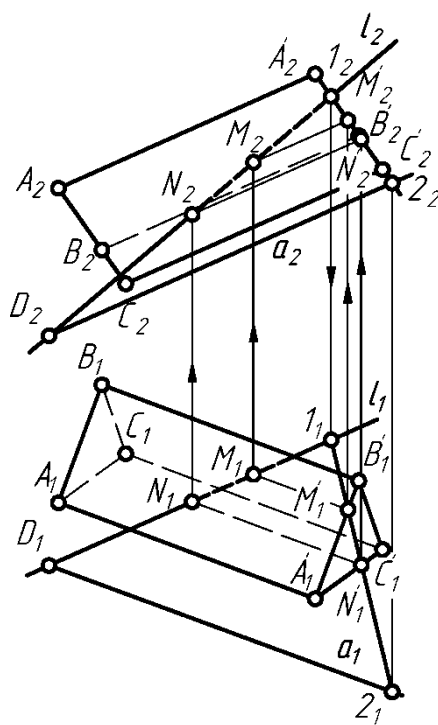


Рис. 6.19

Розглянемо гранню поверхню, основа і бокові грані якої займають загальне положення відносно площин проєкцій.

Нехай задана тригранна призма нижньою основою  $ABC(A_1B_1C_1, A_2B_2C_2)$  і верхньою основою  $A'B'C'(A'_1B'_1C'_1, A'_2B'_2C'_2)$ , яку перетинає пряма  $l(l_1, l_2)$  (рис. 6.19). Необхідно побудувати проєкції точок перетину прямої з поверхнею призми.

Через пряму  $l$  проводять допоміжну січну площину загального положення  $\alpha(l \cap \alpha)$  паралельну до бічних ребер призми ( $\alpha // AA^1$ ). Для її побудови на  $l$  вибирають довільну точку  $D(D_1 \in l_1, D_2 \in l_2)$  через яку проводять пряму  $a(a_1 // A_1A'_1, a_2 // A_2A'_2)$ . Будують проєкції лінії перетину верхньої основи призми з допоміжною січною площиною ( $l_2 \cap A'_2B'_2 = l_2$ ,  $a_2 \cap A'_2C'_2 = 2_2$ ). Отримана пряма  $12$  перетинає верхню основу призми в точках  $M^1$  ( $1_1 2_1 \cap A'_1B'_1 = M^1_1$ ) і  $N^1$  ( $1_1 2_1 \cap A'_1C'_1 = N^1_1$ ), прямим проєкціюванням будують  $M^1_2$  і  $N^1_2$ . Допоміжна січна площина  $\alpha$  перерізає бокові грані призми по прямих лініях, які проходять через точки  $M^1$  і  $N^1$  і паралельні до бокових ребер призми. Отже через  $M^1_2$  і  $N^1_2$  проводять прямі, паралельні до  $A_2A'_2$  до перетину з  $l_2$  й отримують фронтальні проєкції точок перетину прямої з призмою  $M_2$  і  $N_2$ , прямим проєкціюванням  $M_2$  і  $N_2$  на  $l_1$  отримують  $M_1$  і  $N_1$ .

Під час побудови проєкцій точок перетину прямої з поверхнею конуса враховують, що найпростішу фігуру перерізу утворює січна площина, яка проходить через вершину й основу заданого конуса. Отже, для побудови проєкцій точок перетину прямої  $l(l_1, l_2)$  з поверхнею кругового похилого конуса (рис. 6.20) використовують допоміжну січну площину загального

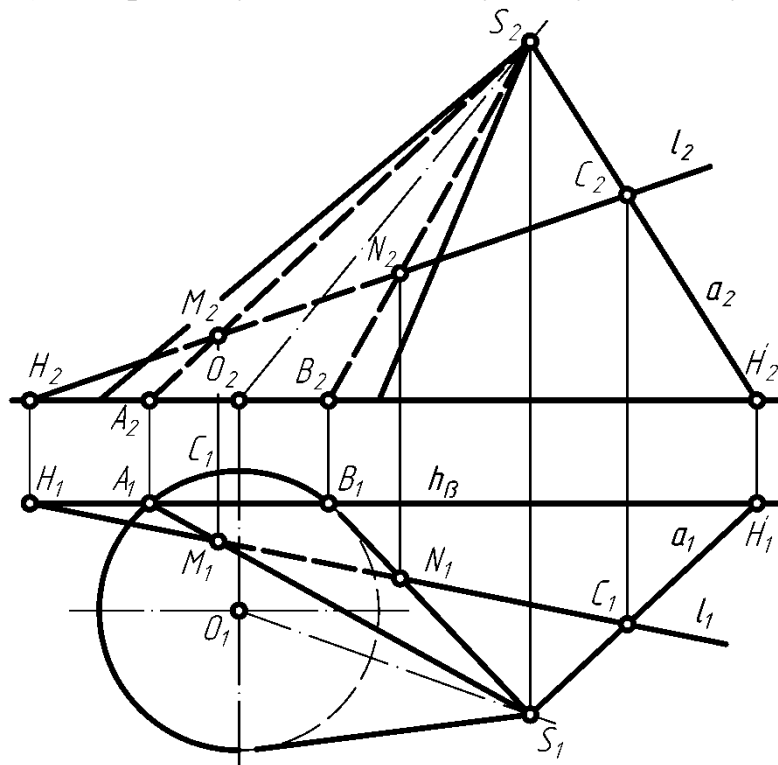


Рис. 6.20

положення  $\beta(l \cap \alpha)$ , яка перерізає поверхню конуса по твірних. Тобто пряма  $a$  проходить через вершину конуса  $S$  ( $S_1 \in a_1, S_2 \in a_2$ ). Для її побудови на

$l$  вибирають довільну точку  $C$  ( $C_1 \in l_1$ ,  $C_2 \in l_2$ ), через  $S$  і  $C$  проводять пряму  $a$ , будують  $h_\beta$  – горизонтальний слід січної площини і визначають  $A$  і  $B$  точки перетину  $h_\beta$  з основою конуса. Через побудовані проекції точок  $A(A_1, A_2)$  і  $B(B_1, B_2)$  будують проекції твірних конуса  $SA(S_1A_1, S_2A_2)$  і  $SB(S_1B_1, S_2B_2)$  по яких січна площина  $\beta$  перерізає поверхню конуса. Точки перетину вказаних твірних з прямою  $l$  є шуканими точками перетину  $M$  ( $SA \cap l = M$ ) і  $N$  ( $SB \cap l = N$ ).

Коли  $h_\beta$  дотикається до основи конуса, то пряма  $l$  є дотичною до поверхні конуса. Коли  $h_\beta$  не перетинає основи конуса, то пряма  $l$  не буде мати з поверхнею конуса жодної спільної точки.

Під час побудови проекцій точок перетину похилого кругового циліндра з прямою  $l(l_1, l_2)$  (рис. 6.21) враховують, що циліндричну поверхню можна розглядати як конічну з невласною вершиною, а площина перетинає циліндричну поверхню уздовж двох прямих, якщо в цій площині знайдеться хоча б одна пряма, паралельна до твірної циліндра у будь якому її положенні. Тому для виконання необхідних побудов використовують допоміжну січну площину загального положення  $\alpha(a/b)$ , задану двома паралельними прямими, які перетинають  $l$  і паралельні до твірної циліндра.

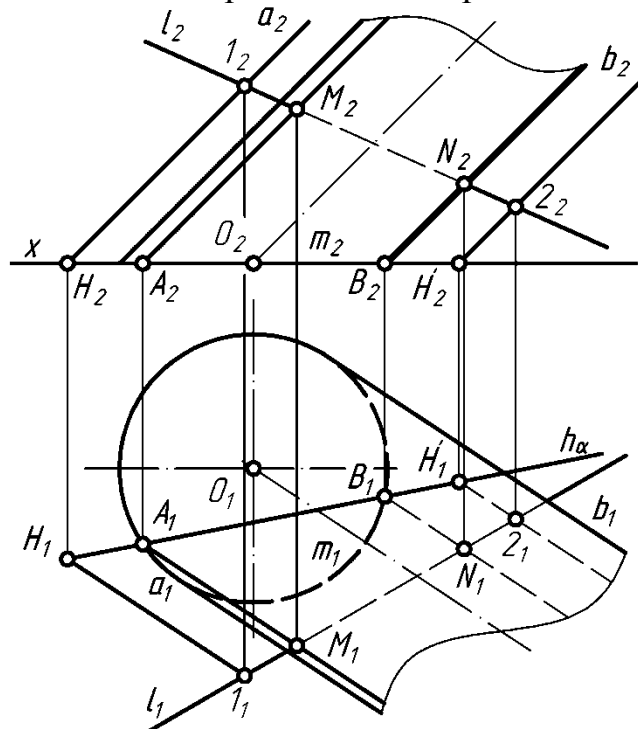


Рис. 6.21

Отже, на  $l$  вибирають довільно точки  $1(I_1, I_2)$  і  $2(2_1, 2_2)$  через які проводять прямі  $a(a \cap l = 1)$  і  $b(b \cap l = 2)$ , паралельні до твірних циліндра, будують  $h_\alpha$  – горизонтальний слід січної площини і визначають  $A_1$  і  $B_1$  – горизонтальні проекції точок перетину  $h_\alpha$  з горизонтальною проекцією основи циліндра, через які проводять горизонтальні проекції твірних циліндра по яких січна площина  $\alpha$  перерізає поверхню циліндра. На перетині вказаних твірних з  $l_1$  розміщені горизонтальні проекції  $M_1$  і  $N_1$  шуканих точок. Фронтальні їх проекції  $M_2$  і  $N_2$  отримують прямим проєкціюванням  $M_1$  і  $N_1$  на  $l_2$ .

## 6.5. Переріз піраміди площиною загального положення

Під час перерізу поверхні площиною загального положення фігура перерізу не проєкціюється на жодну з площин проєкцій в натуральну величину. Тому поставлене завдання вимагає додаткових побудов.

Нехай задана тригранна похила піраміда з основою  $ABC(A_1B_1C_1, A_2B_2C_2)$  і вершиною  $S(S_1, S_2)$  перерізана площиною загального положення  $\alpha(m//n)$ . Необхідно побудувати проєкції фігури перерізу, натуральні величини елементів зрізаної піраміди і розгортку повної поверхні зрізаної піраміди (рис. 6.22).

Для побудови проєкцій фігури перерізу використовують спосіб ребер. Тобто кожне ребро піраміди заключають у проєкціюючу площину, яка перерізає січну площину по прямій лінії. Ребро  $SA$  заключають у фронтально-проєкціюючу площину  $\beta(f_\beta \equiv S_2A_2)$  і будують проєкції її лінії перетину з площиною  $\alpha$   $4_15_1, 4_25_2$ . Точка перетину  $S_1A_1$  з  $4_15_1$  є горизонтальною проєкцією шуканої точки перетину ребра  $SA$  з площиною  $\alpha$  ( $S_1A_1 \cap 4_15_1 = I_1$ ). Прямим проєкціюванням  $I_1$  на  $S_2A_2$  отримують  $I_2$ . Аналогічно будують проєкції точок перетину площини  $\alpha$  з ребрами  $SB$  і  $SC$  ( $S_1B_1 \cap 6_17_1 = 2_1, S_1C_1 \cap 8_19_1 = 3_1$ ). З'єднують між собою однойменні проєкції побудованих точок і отримують горизонтальну  $I_12_13_1$  й фронтальну  $I_22_23_2$  проєкції фігури перерізу.

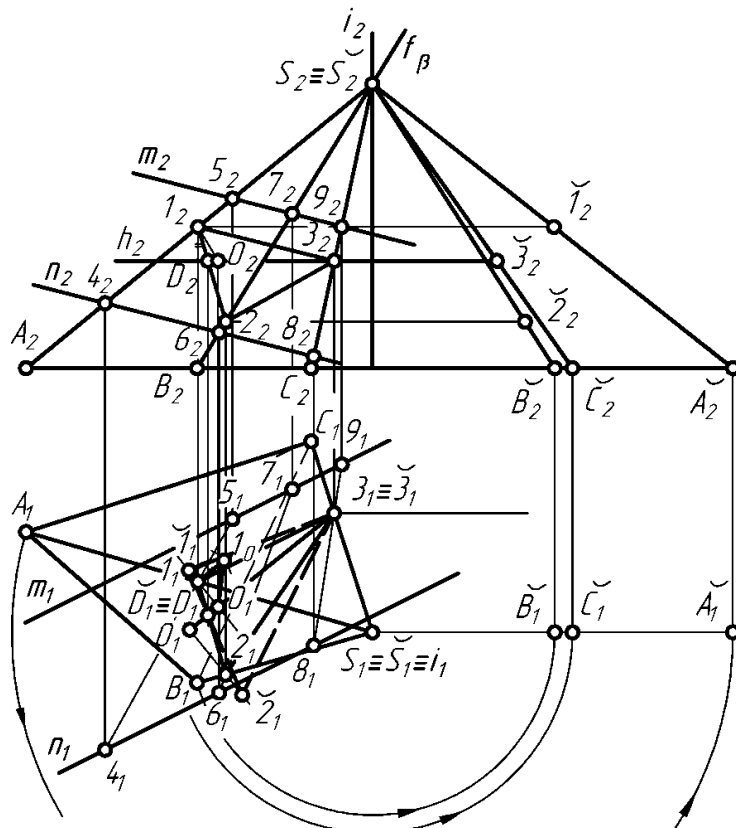


Рис. 6.22

Якщо у межах заданої поверхні не всі ребра перетинають січну площину, то їх продовжують до перетину з цією площиною й отримують фіктивні точки фігури перерізу. Під час побудови проєкцій фігури перерізу її фіктивну частину відкидають.

Для побудови розгортки повної поверхні зрізаної піраміди необхідно знати натуральні величини всіх елементів зрізаної піраміди. Оскільки основа піраміди паралельна до  $\Pi_1$  за побудовою, її горизонтальна проєкція  $A_1B_1C_1$  дорівнює натуральній величині.

Побудову натуральної величини фігури перерізу доцільно виконувати з допомогою методу обертання навколо лінії рівня. В нашому випадку обертання виконують навколо горизонталі  $h$ . Для цього через  $3_2$  проводять  $h_2//x$  ( $h_2 \cap I_2 2_2 = D_2$ ), прямим проєкціюванням  $D_2$  на  $I_1 2_1$  отримують  $D_1$ , сполучають  $3_1$  і  $D_1$  і отримують  $h_1$  – горизонтальну проєкцію осі обертання. Точки  $3$  і  $D$  лежать на осі обертання, отже  $3_1 \equiv \check{3}_1$ ,  $D_1 \equiv \check{D}_1$ . Через  $1_1$  і  $2_1$  проводять горизонтальні сліди площин обертання даних точок, перпендикулярні до  $h_1$ . Обертають точку  $1$ . Для цього будують проєкції центра обертання  $O(O_1, O_2)$ , визначають натуральну величину радіуса обертання  $O_1 I_0$  і обертають точку  $1$  у положення  $\check{1}_1$ . Аналогічно будують точку  $\check{2}_1$  і отримують  $\check{1}_1 \check{2}_1 \check{3}_1$  – натуральну величину фігури перерізу.

Натуральні величини бокових ребер зрізаної піраміди визначають обертанням навколо горизонтально-проєкціюючої осі  $i(i_1, i_2)$ , яка проходить через вершину піраміди  $S$ . У процесі обертання бокові ребра повинні зайняти положення, паралельні до  $\Pi_2$ , тобто їхні горизонтальні проєкції повинні стати паралельними до  $x$ . Отже, через  $S_1$  проводять горизонтальну пряму, на якій у процесі обертання будуть лежати горизонтальні проєкції бокових ребер.

$\Pi_1$  є площиною обертання для всіх точок основи піраміди, тому горизонтальна проєкція центра обертання збігається з  $S_1$ . Радіус обертання для кожної точки основи співпадає з горизонтальною проєкцією відповідного ребра, а тому й використовують їх як радіуси обертання. Таким чином обертають горизонтальні проєкції бокових ребер піраміди навколо  $S_1$  до суміщення з попередньо побудованою горизонтальною прямою й отримують  $\check{A}_1, \check{B}_1, \check{C}_1$ . Прямим проєкціюванням  $\check{A}_1, \check{B}_1, \check{C}_1$  на  $x_{12}$  отримують  $\check{A}_2, \check{B}_2, \check{C}_2$ , сполучають отримані точки з  $S_2$  й отримують натуральні величини бокових ребер піраміди  $\check{S}_2 \check{A}_2, \check{S}_2 \check{B}_2, \check{S}_2 \check{C}_2$ . Через точки  $1_2, 2_2, 3_2$  проводять горизонтальні прямі до перетину з відповідними натуральними величинами бокових ребер і отримують  $\check{1}_2, \check{2}_2, \check{3}_2$ . Отримані при цьому відрізки  $\check{1}_2 \check{A}_2, \check{2}_2 \check{B}_2, \check{3}_2 \check{C}_2$  дорівнюють натуральним величинам бокових ребер зрізаної піраміди.

Розгортку гранчастої поверхні будують, суміщуючи всі її грані з однією площиною шляхом послідовного їх обертання навколо ребер. Розгортку повної поверхні заданої зрізаної піраміди виконують з допомогою спо-

соби трикутників, в основі якого лежить властивість “жорсткості” трикутника, оскільки три відрізки визначають єдиний трикутник. Таким чином, якщо відомі натуральні величини всіх ребер зрізаної піраміди, можна з допомогою методу засічок побудувати всі елементи розгортки зрізаної піраміди.

З економічної точки зору розріз поверхні для побудови розгортки слід робити по найкоротшому ребру, а нижню і верхню основи прибудовувати до найдовших сторін.

Отже, на вільному місці аркуша (рис. 6.23) будують довільну точку  $S$  (вершину майбутньої розгортки), через  $S$  проводять пряму на якій відкладають дійсну величину найкоротшого ребра  $\check{S}_2\check{C}_2$  й отримують точку  $C$ . Всі інші елементи розгортки будують методом засічок. Для побудови точки  $B$  розхилом циркуля рівним  $\check{S}_2\check{B}_2$  із  $S$ , як із центра, описують дугу, і з точки  $C$ , як центра, описують дугу розхилом циркуля, рівним  $B_1C_1$ , точка перетину побудованих дуг є точка  $B$ , яку відповідними лініями з'єднують з  $C$  і  $S$  й отримують натуральну величину грані  $SCB$ . Аналогічно будують точки  $A$  і  $C$  й отримують натуральні величини граней  $SBA$  і  $SAC$ .

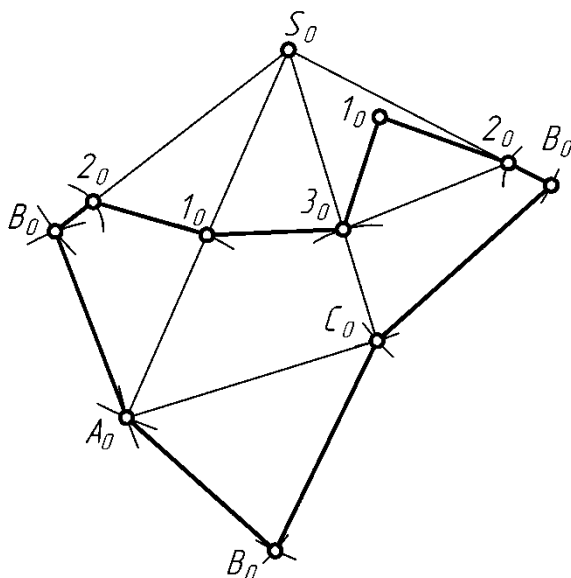


Рис. 6.23

Потім на кожному повному ребрі розгортки, починаючи з основи, відкладають відповідні дійсні величини ребер зрізаної піраміди й отримують розгортку бокової поверхні зрізаної піраміди  $CBAC3I23$ . До розгортки бокової поверхні зрізаної піраміди методом засічок прибудовують дійсну величину основи піраміди  $CBA$  та дійсну величину фігури перерізу  $32I$  і отримують розгортку повної поверхні зрізаної піраміди.

**Завдання 6.1.** Побудувати проєкції, натуральну величину фігури перерізу і розгортку повної поверхні чотиригранної похилої піраміди з основою  $ABCD(A_1B_1C_1D_1, A_2B_2C_2D_2)$  і вершиною  $S(S_1, S_2)$  перерізаної площиною загального положення, заданою слідами  $\alpha(h_\alpha, f_\alpha)$  (рис. 6.24).

**Розв’язування.** Для побудови проєкцій фігури перерізу використовують спосіб ребер. Побудову починають з ребра, найближчого до точки

збігу слідів січної площини  $X_\alpha$ . У нашому випадку ребро  $CS$  заключають у фронтально-проекціюючу площину  $\beta (f_\beta \equiv S_2C_2, h_\beta \perp x_{12})$ , будують проекції лінії перетину площин  $\alpha$  і  $\beta$  ( $h_\alpha \cap h_\beta = H_1, f_\alpha \cap f_\beta = F_2$ ), прямим проекціюванням  $H_1$  на  $x_{12}$  отримують  $H_2$ , прямим проекціюванням  $F_2$  на  $x_{12}$  отримують  $F_1$ , сполучивши однойменні проекції точок  $F$  і  $H$  отримують  $H_1F_1$  – горизонтальну проекцію лінії перетину площин  $\alpha$  і  $\beta$ ;  $H_2F_2$  – фронтальну проекцію лінії перетину площин  $\alpha$  і  $\beta$ . Точка перетину  $S_1C_1$  з  $H_1F_1$  є горизонтальною проекцією точки перетину ребра  $SC$  з січною площиною  $\alpha$  ( $S_1C_1 \cap H_1F_1 = 3_1$ ). Прямим проекціюванням  $3_1$  на  $S_2C_2$  отримують  $3_2$ . Проекції точок перетину інших ребер з січною площиною можна побудувати аналогічно.

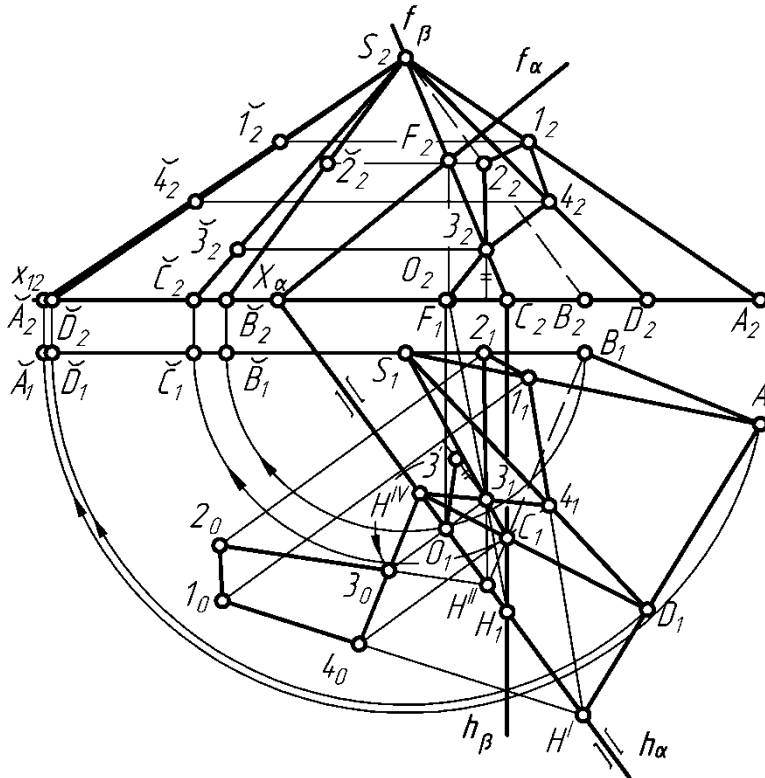


Рис. 6.24

Для спрощення побудови використовують спосіб споріднення (гомології). Щоб використати спосіб споріднення визначають центр споріднення  $S_1$ , вісь споріднення  $s_0 \equiv h_\alpha$  і відповідні пари точок, які належать одночасно тому чи іншому ребру й основі чи фігурі перерізу. На  $SC$  точка  $C$  належить основі піраміди і точки  $3$  належить фігурі перерізу, а на ребрі  $SD$  точка  $D$  належить основі піраміди і точка  $4$  належить фігурі перерізу. Точки  $C_1, D_1$  і  $3_1, 4_1$  лежать на споріднених прямих, які перетинають вісь споріднення  $h_\alpha$  у спільній точці, яку називають полюсом споріднення  $H^{IV}$ . Отже щоб побудувати  $4_1$  продовжують  $C_1D_1$  до перетину з  $h_\alpha$  й отримують  $H^{IV}$  ( $C_1D_1 \cap h_\alpha = H^{IV}$ ), будують споріднену пряму  $H^{IV}3_1$  і продовжують до перетину з  $S_1D_1$ , отримують  $4_1$  ( $H^{IV}3_1 \cap S_1D_1 = 4_1$ ), прямим проекціюванням  $4_1$  на  $S_2D_2$  отримують  $4_2$ . Аналогічно будують проекції точок  $1(1_1, 1_2)$  і  $2(2_1, 2_2)$  і отримують  $1_12_13_14_1$  – горизонтальну проекцію фігури перерізу і  $1_22_23_24_2$  – фронтальну проекцію фігури перерізу.

Для побудови натуральної величини фігури перерізу використовують метод обертання навколо прямої рівня, за вісь обертання приймають  $h_\alpha$ , а побудову виконують аналогічно описаному вище випадку. Вершини фігури перерізу  $1234$  як об'єкти обертання обертають до суміщення з  $\Pi_1$ . Площинами обертання для кожного з об'єктів обертання є горизонтально-проекціюючі площини, перпендикулярні до осі обертання  $h_\alpha$ . Отже, через  $1_1, 2_1, 3_1, 4_1$  проводять горизонтальні сліди площин обертання, перпендикулярні до  $h_\alpha$ . Першою обертають точку  $3$ . Для цього визначають горизонтальну проекцію центра обертання  $O_1$  як точку перетину осі обертання  $h_\alpha$  і горизонтального сліду площини обертання для точки  $3$ , прямим проекціюванням  $O_1$  на  $x_{12}$  отримують  $O_2$  – фронтальну проекцію центра обертання, сполучають однойменні проекції точок  $3$  і  $O$  і отримують  $3_1O_1$  – горизонтальну проекцію радіуса обертання;  $3_2O_2$  – фронтальну проекцію радіуса обертання. Використовуючи метод прямокутного трикутника, знаходять дійсну величину радіуса обертання. Для цього через  $3_1$  проводять пряму, перпендикулярну до  $3_1O_1$ , відкладають на ній перевищення точки  $3_2$  над  $x_{12}$  і отримують  $3^1$ , з'єднують  $3^1$  з  $O_1$  і отримують дійсну величину радіуса обертання  $3^1O_1$  для точки  $3$ . Знайденим радіусом роблять засічку на горизонтальному сліді площини обертання, який проходить через  $3_1$ , і отримують суміщену точку  $3_0$ . Аналогічно можна побудувати інші суміщені точки.

Для спрощення побудови суміщених точок використовують запропонований раніше спосіб споріднення. Тоді проводять пряму  $H^V3_0$ , споріднену прямій  $4_1H^V$ , до перетину з горизонтальним слідом площини обертання, який проходить через  $4_1$ , і отримують суміщену точку  $4_0$ . Положення точок  $2_0$  і  $1_0$  знаходять аналогічно і використовують для цього полюси споріднення  $H''$  і  $H'$ .

Дійсні величини бокових ребер зрізаної піраміди використовують з допомогою методу обертання навколо горизонтально-проекціюючої осі за методикою описаною вище. Тобто обертають горизонтальні проекції бокових ребер навколо  $S_1$  до положення, паралельного до  $x_{12}$  і отримують  $\check{A}_1, \check{B}_1, \check{C}_1, \check{D}_1$ . Прямим проекціюванням,  $\check{A}_1, \check{B}_1, \check{C}_1, \check{D}_1$  на  $x_{12}$  отримують,  $\check{A}_1, \check{B}_1, \check{C}_1, \check{D}_1$  сполучають отримані точки з  $S_2 \equiv \check{S}_2$  і отримують натуральні величини бокових ребер піраміди  $\check{S}_2\check{A}_2, \check{S}_2\check{B}_2, \check{S}_2\check{C}_2, \check{S}_2\check{D}_2$ . Через точки  $1_2, 2_2, 3_2, 4_2$  проводять горизонтальні прямі до перетину з відповідними натуральними величинами бокових ребер і отримують  $\check{1}_2; \check{2}_2; \check{3}_2; \check{4}_2$ . Отримані відрізки  $\check{A}_2\check{1}_2, \check{B}_2\check{2}_2, \check{C}_2\check{3}_2, \check{D}_2\check{4}_2$  дорівнюють натуральним величинам бокових ребер зрізаної піраміди.

Розгортку повної поверхні зрізаної піраміди будують, використовуючи метод засічок за описаною вище методикою (рис. 6.25).



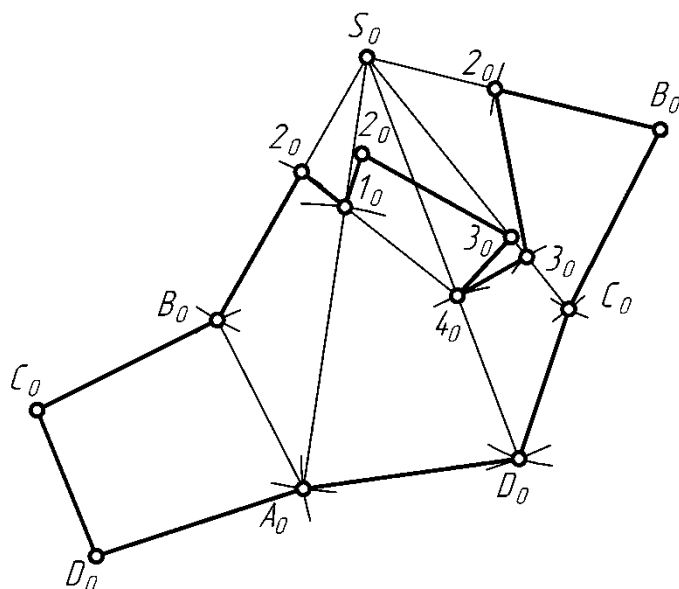
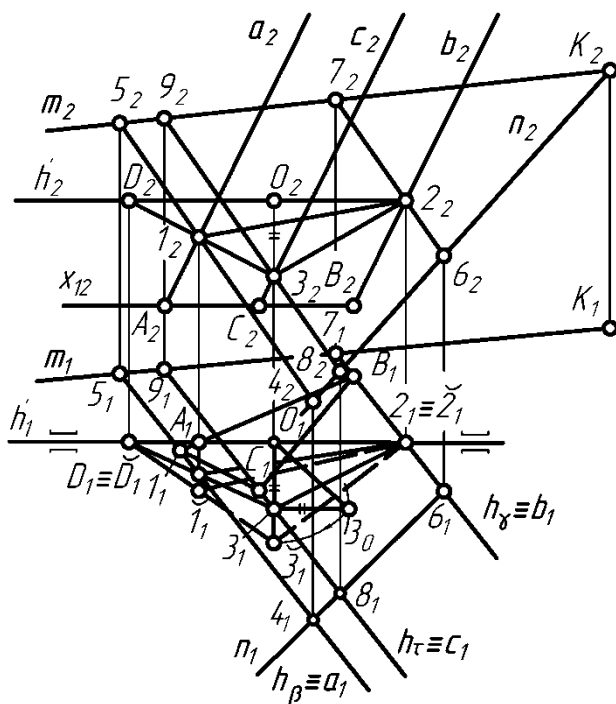


Рис. 6.25

## 6.6. Переріз призми площиною загального положення

Нехай задана тригранна похила призма з основою  $ABC(A_1B_1C_1, A_2B_2C_2)$  і боковими ребрами  $a(a_1, a_2), b(b_1, b_2), c(c_1, c_2)$ , перерізана площиною загального положення  $\alpha(m \cap n)$ . Необхідно побудувати проєкції фігури перерізу, натуральні величини елементів зрізаної призми і розгортку повної поверхні зрізаної призми (рис. 6.26).



Перетин фронтальних проекцій цих ліній з відповідними фронтальними проекціями бокових ребер призми визначають фронтальні проекції точок перетину бокових ребер призми з січною площиною ( $4_2 5_2 \cap a_2 = 1_2$ ,  $6_2 7_2 \cap b_2 = 2_2$ ,  $8_2 9_2 \cap c_2 = 3_2$ ). Горизонтальні проекції точок  $1, 2, 3$  визначають прямим проекціюванням. З'єднують між собою однойменні проекції побудованих точок і отримують горизонтальну  $1_1 2_1 3_1$  і фронтальну  $1_2 2_2 3_2$  проекції фігури перерізу.

Побудову натуральної величини фігури перерізу виконують з допомогою методу обертання навколо горизонталі  $h^1$ . Для цього через  $2_2$  проводять  $h^1_2 // x$  ( $h^1_2 \cap 1_2 3_2 = D_2$ ), прямим проекціюванням  $D_2$  на  $1_1 3_1$  отримують  $D_1$ , сполучають  $2_1$  і  $D_1$  і отримують  $h^1_1$  – горизонтальну проекцію осі обертання. Точки  $2$  і  $D$  лежать на осі обертання, отже  $2_1 \equiv \tilde{2}_1$ ,  $D_1 \equiv \tilde{D}_1$ . Процес обертання виконують за описаною вище методикою і отримують  $\tilde{1}_1 \tilde{2}_1 \tilde{3}_1$  – натуральну величину фігури перерізу.

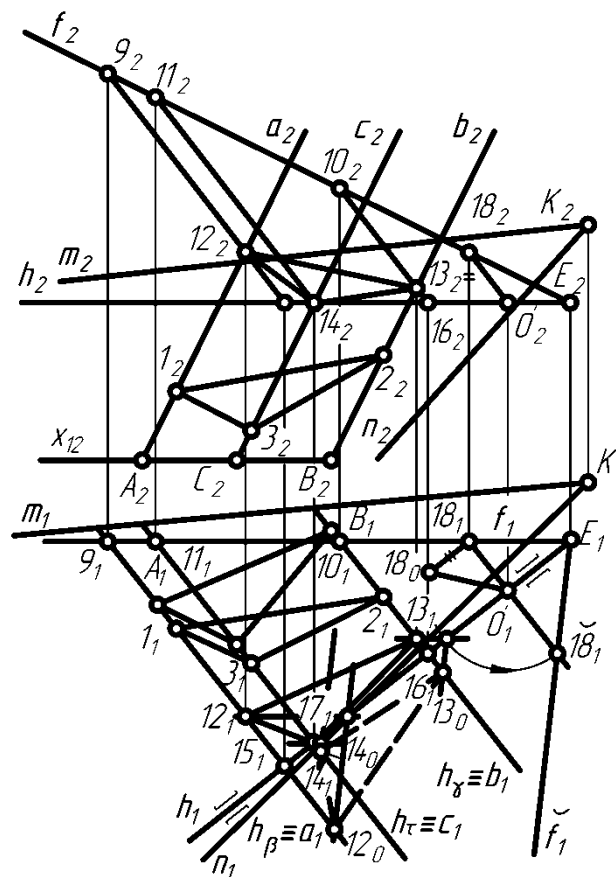


Рис. 6.27

Для побудови розгортки бокової поверхні зрізаної призми необхідно знати натуральні величини її граней. Побудову натуральних величин бокових граней зрізаної призми замінюють визначенням натуральних величин зрізаних бокових ребер і натуральної величини перерізу призми площиною, перпендикулярною до бокових ребер, який називають нормальним перерізом.

Для побудови нормального перерізу вибирають довільну точку  $E(E_1, E_2)$  (рис. 6.27), через яку проводять січну площину  $\Delta(h \cap f)$ , перпендикулярну до бокових ребер призми ( $h_1 \perp a_1, f_1 \parallel x_{12}, f_2 \perp a_2, h_2 \parallel x_{12}$ ). Побудову проєкцій нормального перерізу виконують аналогічно описаній вище побудові проєкцій перерізу  $123$  і використовують горизонтально проєкціюючі площини  $\beta, \gamma, \tau$ . У результаті отримують горизонтальну  $12_1 13_1 14_1$  і фронтальну  $12_2 13_2 14_2$  проєкції нормального перерізу.

Для побудови натуральної величини фігури нормального перерізу використовують метод обертання навколо прямої рівня. За вісь обертання приймають горизонталь  $h$  січної площини  $\Delta$ . Для спрощення процесу побудови й уникнення необхідності обертати всі вершини нормального перерізу виконують суміщення площини  $\Delta$  шляхом обертання фронталі в положення  $\check{f}_1$ . Для цього обертають довільну точку  $18$  навколо  $h$  у суміщене положення  $18_1$ , через  $E_1$  і  $18_1$  проводять пряму й отримують  $\check{f}_1$ . З точки  $12_1$  проводять пряму паралельну до  $f_1$  до перетину в точці  $M$  з  $h_1$ . З точки  $M$  проводять пряму паралельну  $\check{f}_1$  до перетину в точці  $12_0$  зі слідом площини обертання точки  $12$ . Точки  $13_0$  і  $14_0$  будують аналогічно з побудовою  $12_0$ .

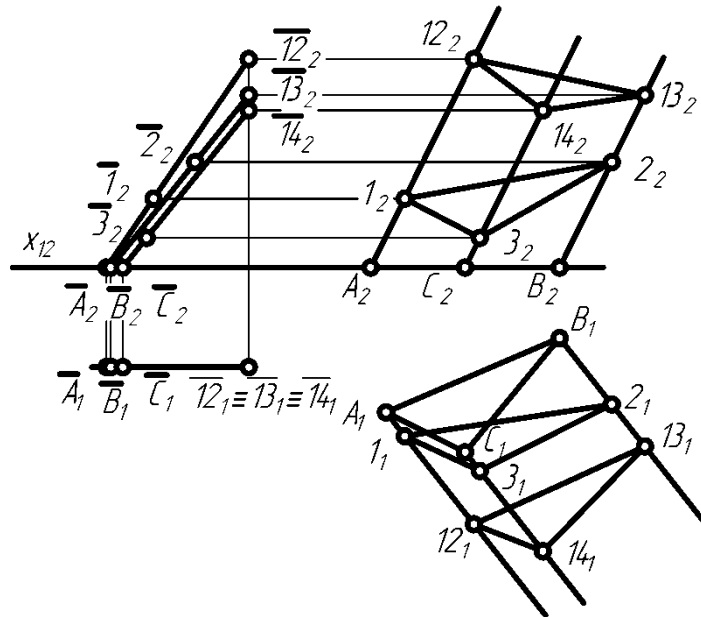


Рис. 6.28

Натуральну величину ребер призми від нормального перерізу до основи призми і ребер зрізаної призми визначають з допомогою методу плоско-паралельного переміщення. В результаті такого переміщення бокові ребра на  $\Pi_2$  повинні проєкціюватися в натуральну величину. Тобто їхні горизонтальні проєкції повинні зайняти положення паралельне до  $x_{12}$ . Отже, на вільному місці проводять горизонтальну пряму і вибирають на ній довільну точку, в якій суміщають  $\overline{12}_1 \equiv \overline{13}_1 \equiv \overline{14}_1$  (рис. 6.28), методом засічок на даній прямій будують  $\overline{A}_1(A_1 12_1 = \overline{A}_1 \overline{12}_1)$ ,  $\overline{B}_1(B_1 13_1 = \overline{B}_1 \overline{13}_1)$ ,  $\overline{C}_1(C_1 14_1 = \overline{C}_1 \overline{14}_1)$ . Прямим проєкціюванням  $\overline{A}_1, \overline{B}_1, \overline{C}_1$  на  $x_{12}$  отримують  $\overline{A}_2, \overline{B}_2, \overline{C}_2$ , через

$\overline{12}_1 \equiv \overline{13}_1 \equiv \overline{14}_1$  проводять вертикальну лінію проєкційного зв'язку, через  $12_2, 13_2, 14_2$  проводять горизонтальні прямі до перетину з побудованою вертикальною лінією проєкційного зв'язку і отримують відповідно  $\overline{12}_2 \equiv \overline{13}_2 \equiv \overline{14}_2$  сполучають  $\bar{A}_2$  з  $\overline{12}_2$ ,  $\bar{B}_2$  з  $\overline{13}_2$ ,  $\bar{C}_2$  з  $\overline{14}_2$  й отримують натуральні величини ребер призми від нормального перерізу до основи.

Для побудови натуральних величин ребер зрізаної призми через точки  $1_2, 2_2, 3_2$  проводять горизонтальні прямі до перетину з відповідними натуральними величинами ребер призми від нормального перерізу до основи й отримують  $\bar{1}_2, \bar{2}_2, \bar{3}_2$ . Отримані відрізки  $\bar{A}_2\bar{1}_2, \bar{B}_2\bar{2}_2, \bar{C}_2\bar{3}_2$  дорівнюють натуральним величинам бокових ребер зрізаної призми.

Розгортку повної поверхні зрізаної призми виконують з допомогою способу нормального перерізу. Для цього на вільному місці креслення проводять горизонтальну пряму, на яку наносять периметр нормального перерізу, призми починаючи з точки, через яку проходить найкоротше ребро (рис. 6.29). Оскільки в нашому випадку найкоротшим є ребро  $C3$  на побудованій горизонтальній прямій довільно вибирають точку  $14$  і відкладають відрізки  $1412=14_012_0, 1213=12_013_0, 1314=13_014_0$ . Через  $14, 12, 13, 14$  проводять вертикальні прямі, на яких відкладають дійсні величини ребер призми від нормального перерізу до основи ( $14C=\overline{14}_2\bar{C}_2, 12A=\overline{12}_2\bar{A}_2, 13B=\overline{13}_2\bar{B}_2, 14C=\overline{14}_2\bar{C}_2$ ), дійсні величини ребер зрізаної призми ( $C3=\bar{C}_2\bar{3}_2, A1=\bar{A}_2\bar{1}_2, B2=\bar{B}_2\bar{2}_2, C3=\bar{C}_2\bar{3}_2$ ) й отримують розгортку бокової поверхні зрізаної призми  $CAB C3213$ . Способом засічок прибудовують до розгортки бокової поверхні натуральні величини нижньої основи  $ABC$  і фігури перерізу  $123$  й отримують розгортку повної поверхні зрізаної призми.

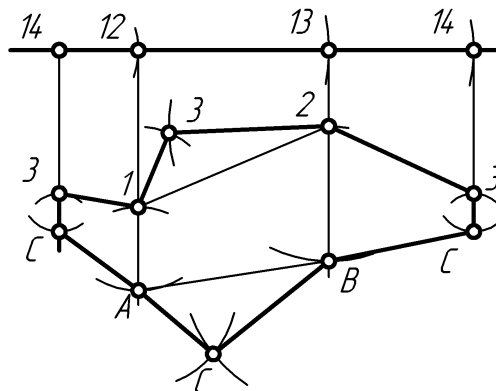


Рис. 6.29

**Завдання 6.2.** Побудувати проєкції, натуральну величину фігури перерізу і розгортку повної поверхні чотиригранної похилої призми з основою  $ABCD(A_1B_1C_1D_1, A_2B_2C_2D_2)$  і боковими ребрами  $a(a_1, a_2), b(b_1, b_2), c(c_1, c_2), d(d_1, d_2)$  перерізаної площиною загального положення заданою слідами  $\alpha(h_\alpha, f_\alpha)$  (рис. 6.30).

**Розв'язування.** Проєкції і натуральну величину фігури перерізу будують аналогічно описаному вище перерізу піраміди площиною, заданою слідами.

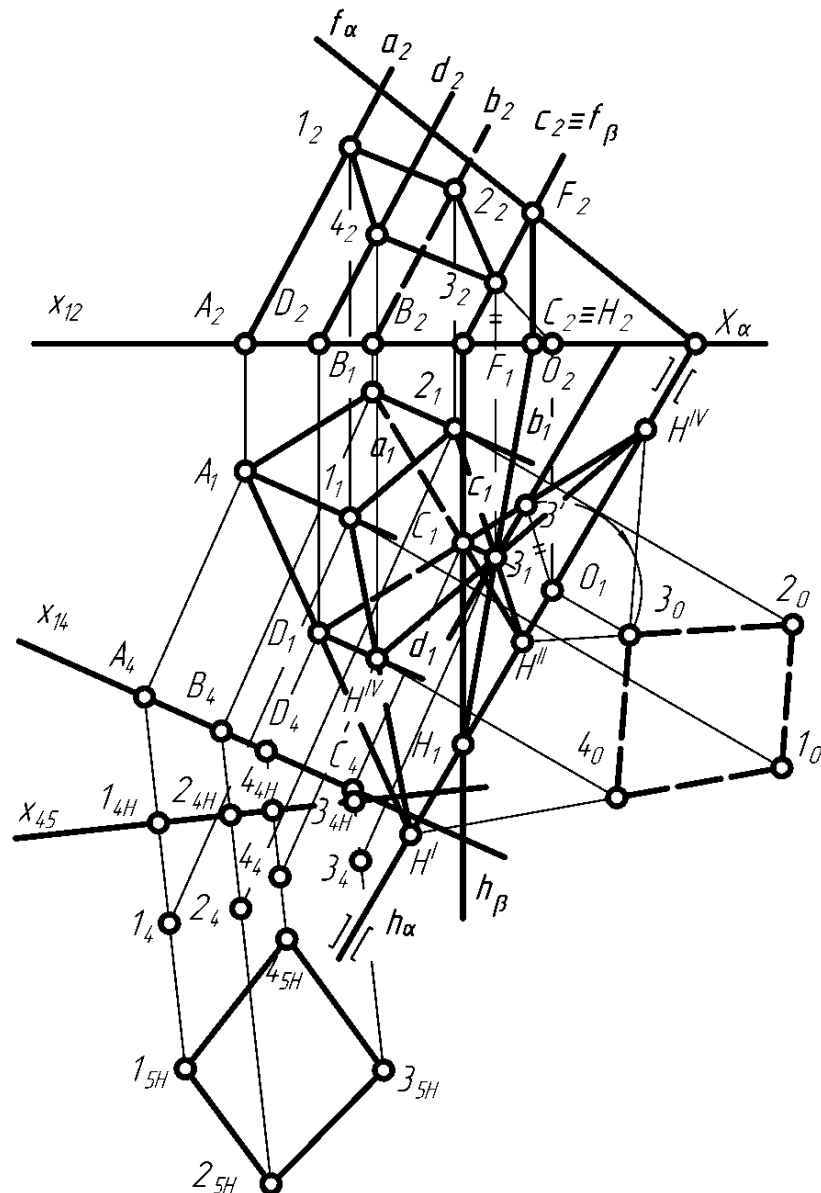


Рис. 6.30

Для побудови натуральної величини бокових ребер і натуральної величини нормального перерізу використовують метод заміни площин проєкцій. При цьому фронтальну площину проєкцій  $\Pi_2$  замінюють площиною  $\Pi_4$ , яка перпендикулярна до площини  $\Pi_1$  і паралельна до бокових ребер призми. Внаслідок такої заміни проєкції бокових ребер призми на нову площину проєкцій  $\Pi_4$  дорівнюють їх натуральній величині.

Практичну побудову натуральної величини бокових ребер призми виконують у наступній послідовності. На вільному місці креслярського паперу паралельно до горизонтальних проєкцій бокових ребер призми на довільній відстані від них проводять вісь  $x_{14}$  нової системи площин проєкцій  $\Pi_1\Pi_4$  і проєкціюють на неї під прямим кутом точки основи призми, внаслідок чого отримують нову проєкцію цієї основи  $A_4B_4C_4D_4$ . Через  $1_1, 2_1, 3_1, 4_1$  проводять перпендикуляри до  $x_{14}$  і на їх продовженнях відкладають перевищення точок  $1_2, 2_2, 3_2, 4_2$  над віссю  $x_{12}$ . У результаті отримують точки  $1_4, 2_4, 3_4, 4_4$ . З'єднують між собою однойменні проєкції точок основи і фігури

перерізу, які лежать на одних бокових ребрах і отримують відрізки, які дорівнюють натуральним величинам бокових ребер зрізаної призми.

Для визначення натуральної величини нормального перерізу бокові ребра призми переводять у положення проєкціюючих. Тобто горизонтальну площину проєкцій  $\Pi_1$  замінюють площиною  $\Pi_5$ , яка перпендикулярна до площини  $\Pi_4$  і перерізає її по осі  $x_{45}$ , перпендикулярній до бокових ребер зрізаної призми. Отже на вільному місці креслярського паперу проводять  $x_{45} \perp A_4I_4$ . Точки перетину осі  $x_{45}$  з проєкціями бокових ребер призми на  $\Pi_4$  є проєкціями вершин нормального перерізу на  $\Pi_4$  ( $1_{4n}, 2_{4n}, 3_{4n}, 4_{4n}$ ). Через точки  $1_{4n}, 2_{4n}, 3_{4n}, 4_{4n}$  проводять перпендикуляри до  $x_{45}$  і відкладають на них перевищення точок  $1_1, 2_1, 3_1, 4_1$  над віссю  $x_{14}$ , з'єднують побудовані точки й отримують натуральну величину нормального перерізу  $1_{5n}, 2_{5n}, 3_{5n}, 4_{5n}$ .

Під час побудови розгортки повної поверхні зрізаної призми аналогічно описаному вище прикладу на вільному місці креслярського паперу проводять горизонтальну пряму, на яку наносять периметр нормального перерізу, починаючи з точки, через яку проходить найкоротше ребро (у нашому випадку точка  $3_{5n}$ ) (рис. 6.31).

Через побудовані точки  $3_n, 4_n, 1_n, 2_n, 3_n$  проводять вертикальні прямі, на яких вгору відкладають відрізки відповідних дійсних величин ребер, що розміщені вниз від осі  $x_{45}$ , наприклад  $3_n3=3_{4n}3_4$ , а вниз – відрізки, які розміщені вгору від осі  $x_{45}$ , наприклад  $3_nC=3_{4n}C_4$ . Таким чином будують дійсні величини бокових ребер зрізаної призми ( $3C=3_4C_4, 4D=4_4D_4, 1A=1_4A_4, 2B=2_4B_4, 3C=3_4C_4$ ) й отримують розгортку бічної поверхні зрізаної призми  $CDABC32143$ .

Для отримання розгортки повної поверхні зрізаної призми з допомогою методу засічок до бокової поверхні добудовують натуральні величини основи призми  $ABCD$  і фігури перерізу  $1234$ . Добудову рекомендовано виконувати до найдовших сторін, але так щоб, під час розкроювання досягалася найбільша економія матеріалу.

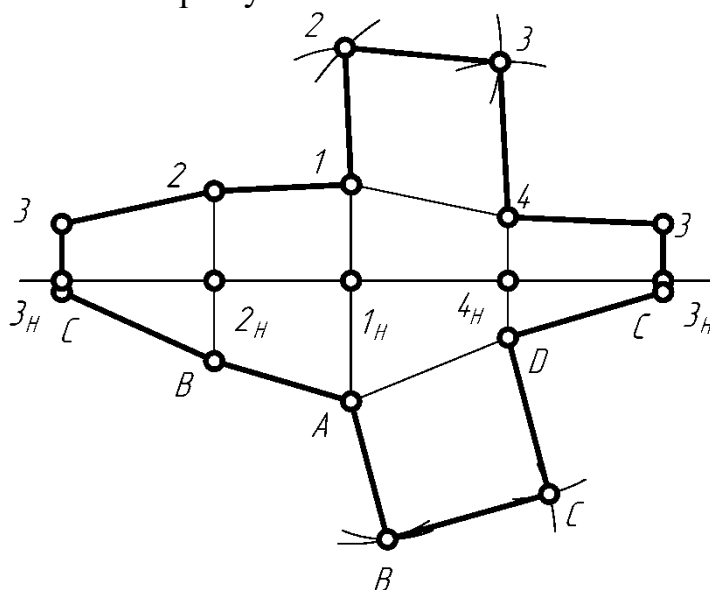


Рис. 6.31

## 6.7. Переріз конуса площиною загального положення

Як відзначено вище, в результаті перерізу поверхонь обертання площинами можуть утворюватися перерізи, обмежені кривими лініями. Для побудови проєкцій таких кривих ліній необхідно побудувати проєкції точок перетину ряду ліній, які належать поверхні з січною площиною, і отримані точки плавно з'єднати між собою з допомогою лекала. Отже, задачу зводять до побудови проєкцій точки перетину прямої з площиною. При цьому, в першу чергу, визначають проєкції характерних точок кривих ліній. Якщо знайдені характерні точки кривої на окремих ділянках не виявляють характеру кривої, будують проєкції проміжних точок.

Нехай заданий прямий круговий конус, основа якого лежить у площині  $\Pi_1$ , в основі конуса – коло радіусом  $R$  з центром у точці  $K(K_1, K_2)$ , і вершина  $S(S_1, S_2)$ , перерізаний січною площиною загального положення  $\alpha(ABC)$  (рис. 6.32). Необхідно побудувати проєкції і натуральну величину фігури перерізу і розгортку бокової поверхні зрізаного конуса.

Побудову починають з визначення назви кривої лінії, яка обмежує фігуру перерізу. Для цього січну площину перетворюють у проєкціюючу, використовуючи метод заміни площин проєкцій. У нашому випадку площину  $\Pi_2$  замінюють площиною  $\Pi_4$ , яка перерізає площину  $\Pi_1$  по осі  $x_{14}$ , перпендикулярній до горизонталі січної площини. Оскільки сторона  $AB(A_1B_1, A_2B_2)$  заданої січної площини одночасно є горизонталлю даної площини, на вільному місці креслярського паперу проводять  $x_{14} \perp A_1B_1$  і будують проєкції конуса і січної площини у новій площині проєкцій  $\Pi_4$ . На новій проєкції січна площина перерізає всі твірні конуса і нахилена до його основи. Отже фігура перерізу – еліпс.

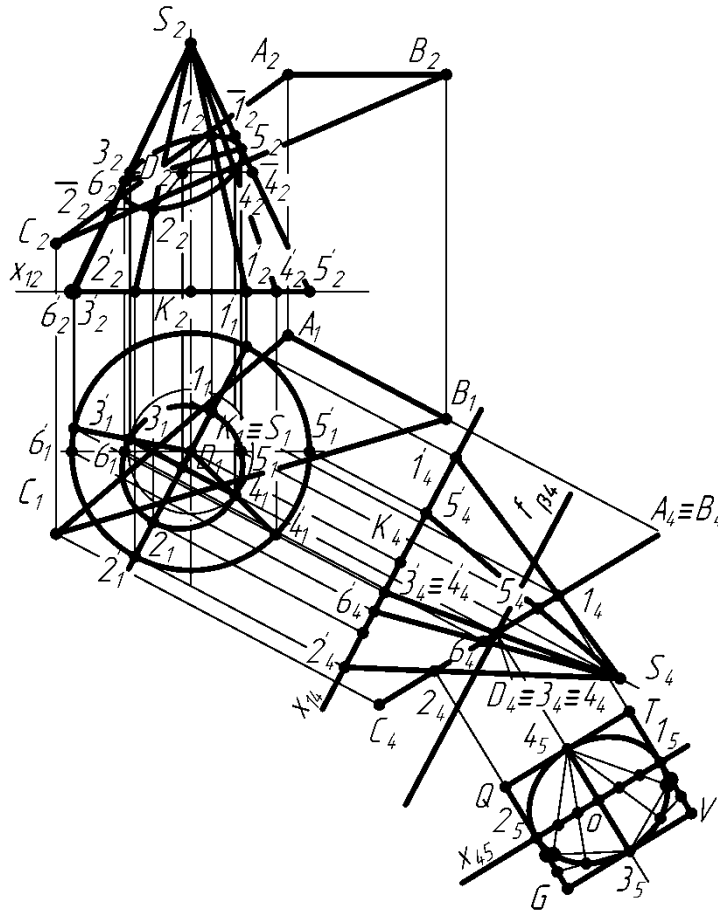


Рис. 6.32

Побудову проєкцій еліпса починають з побудови проєкцій великої і малої осей. На площину  $\Pi_4$  велику вісь еліпса проєкціюють у натуральну величину. Кінці великої осі еліпса є найнижчою і найвищою точками перерізу й утворені в результаті перетину крайніх твірних конуса з січною площиною ( $I'_4 S_4 \cap A_4 C_4 = I_4$ ,  $2'_4 S_4 \cap A_4 C_4 = 2_4$ ). Зворотним проєкціюванням будують горизонтальну  $1_1 2_1$  і фронтальну  $1_2 2_2$  проєкції великої осі еліпса. Осі еліпса перпендикулярні і в точці перетину діляться навпіл. Отже, на площину  $\Pi_4$  малу вісь еліпса проєкціюють у точку  $3_4 \equiv 4_4$ , яка ділить  $1_4 2_4$  навпіл. Для подальшої побудови проводять проєкції твірної  $3' S$ , на якій лежить точка  $3$  і твірної  $4' S$ , на якій лежить точка  $4$ . Зворотним проєкціюванням будують горизонтальну  $3_1 4_1$  і фронтальну  $3_2 4_2$  проєкції малої осі еліпса.

Побудову проєкцій у вихідній системі площин проєкцій і натуральної величини малої осі еліпса можна виконувати іншим шляхом. Для цього через  $3_4 \equiv 4_4$  проводять допоміжну січну площину  $\beta(f_\beta)$ , паралельну до основи конуса, яка перерізає конус по колу. Отримане від перерізу коло на площину  $\Pi_2$  проєкціюється у натуральну величину. Для визначення дійсної величини малої осі еліпса  $3_1 4_1$  з точки  $3_4 \equiv 4_4$  проводять лінію проєкційного зв'язку до перетину її з проведеним колом на площині  $\Pi_1$ . Для побудови фронтальної



проекції малої осі еліпса використовують точку  $D$  перетину допоміжної січної площини  $\beta$  з  $AC$ . У площині  $\Pi_4$   $D_4 \equiv 3_4 \equiv 4_4$ . У площині  $\Pi_1$   $D_1$  лежить на перетині ліній проекційного зв'язку, що проведені через точку  $D_4 \equiv 3_4 \equiv 4_4$  і  $1_4 2_4$ . В площині  $\Pi_2$  точку  $D_2$  отримують прямим проекціюванням  $D_1$  на  $A_2 C_2$ . Фронтальний слід  $f_\beta$  будують проекціюванням з допомогою точки  $D$ . Фронтальні проекції точок  $3$  і  $4$  знаходять прямим проекціюванням  $3_1$  і  $4_1$  на  $f_\beta$ .

Для виконання побудови проекцій фігури перерізу необхідно будувати проекції проміжних її точок, які лежать на твірних  $5' S$  і  $6' S$ . Прямим проекціюванням будують  $5'_1; 6'_1$ , і  $5'_4; 6'_4$ , сполучають  $5'_4$  з  $S_4$  і  $6'_4$  з  $S_4$  і отримують точки  $5_4$  і  $6_4$  ( $5'_4 S_4 \cap A_4 C_4 = 5_4$ ,  $6'_4 S_4 \cap A_4 C_4 = 6_4$ ), зворотним проекціюванням отримують  $5_1$ ,  $6_1$  і  $5_2$ ,  $6_2$ .

Горизонтальну і фронтальну проекції фігури перерізу будують, використовуючи метод спряжених діаметрів (побудова не показана).

Для побудови натуральної величини еліпса, що утворився у результаті перерізу кругового конуса площиною загального положення  $\alpha(ABC)$ , будують натуральні величини великої і малої осей еліпса. При цьому використовують метод заміни площин проекцій і заміняють площину  $\Pi_1$  на площину  $\Pi_5$ , яка перерізає площину  $\Pi_4$  по осі  $x_{45}$  паралельній до січної площини  $\alpha(ABC)$ . Отже на вільному місці креслярського паперу будують  $x_{45}$  ( $x_{45} // A_4 C_4$ ) і через точки  $1_4$ ,  $2_4$ ,  $3_4 \equiv 4_4$  проводять перпендикуляри (лінії проекційного зв'язку) до  $x_{45}$ . Точки  $1_5$  і  $2_5$  отримують на перетині відповідних перпендикулярів і осі  $x_{45}$ . Для побудови точок  $3_5$  і  $4_5$  на перпендикулярі, що проходить через  $3_4 \equiv 4_4$ , відкладають по обидві сторони від осі  $x_{45}$  відрізки, що дорівнюють половині величини різниці перевищень кінців малої осі еліпса  $3_4$  над площиною  $\Pi_1$ .

Натуральну величину еліпса будують, використовуючи метод спряжених діаметрів. Отримані проекції великої і малої осей еліпса є спряженими діаметрами, тому що кожна із них ділить навпіл хорди еліпса, що паралельні до іншої осі. Для побудови через точки  $1_5$  і  $2_5$  проводять прямі, паралельні до  $3_5 4_5$ , через точки  $3_5$  і  $4_5$  проводять прямі, паралельні до  $1_5 2_5$ . У результаті отримують прямокутник  $GQTV$ . Спряжений діаметр  $1_5 2_5$  і сторону прямокутника  $GQ$  ділять на довільне однакове число рівних частин, наприклад на 6. Із точок  $3_5$  і  $4_5$  проводять промені відповідно через точки ділення спряженого діаметра і точки ділення прямокутника. Пересічення променів, що проходять через однойменні точки поділу спряженого діаметра і сторони прямокутника, визначають точки еліпса, які сполучають між собою з допомогою лекала. Побудову симетричної частини еліпса виконують аналогічно.

Для побудови розгортки бічної поверхні зрізаного конуса визначають натуральні величини твірних, на яких розміщені характерні  $(1, 2, 3, 4)$  і проміжні  $(5, 6)$  точки. Для цього використовують метод обертання аналогічно визначенню натуральних величин ребер піраміди. У нашому випадку

всі твірні конуса дорівнюють і їх натуральна величина дорівнює  $S_2 5'_2$ . Натуральну величину зрізаних твірних конуса визначають методом обертання навколо проєкціюючої (горизонтальної) прямої, що проходить через вершину конуса, ставлячи їх у окреме (фронтальне) положення до суміщення з крайньою твірною. Тобто через точки  $1_2, 2_2, 3_2, 4_2, 5_2, 6_2$ , та інші проводять горизонтальні прямі до перетину з  $S_2 5'_2$  й отримують  $\bar{1}_2, \bar{2}_2, \bar{3}_2, \bar{4}_2, \bar{5}_2, \bar{6}_2$ .

Розгорткою бокової поверхні прямого конуса є круговий сектор, тому для її побудови визначають кут при вершині сектора розгортки за формулою

$$\varphi = (d/l) \times 180^\circ,$$

де  $d$  – діаметр основи конуса, мм;

$l$  – натуральна величина твірної конуса, мм.

На вільному місці аркуша креслярського паперу вибирають довільну точку  $S$  (рис. 6.33). З точки  $S$ , як центра, розхилом циркуля, що дорівнює довжині твірної конуса  $l = S_2 5'_2$  описують дугу сектора з кутом, що відповідає знайденому центральному куту розгортки  $\varphi$ .

Засічки хорд, що з'єднують сусідні характерні й допоміжні точки на основі конуса (на горизонтальній проєкції основи), відзначають точки на розгорнутому полі основи конуса і з'єднують їх з вершиною  $S_0$ . При цьому побудову розгортки виконують у такому порядку, щоб зрізаний конус був розрізаний по найкоротшій твірній, тобто по твірній, на якій лежить найнижча точка фігури перерізу.

На відповідних твірних розгортки відкладають знайдені натуральні величини зрізаних твірних. Отримані точки розгортки за допомогою лекала з'єднують плавною кривою лінією й отримують розгортку бокової поверхні зрізаного конуса  $231422'3'1'4'2'$ .

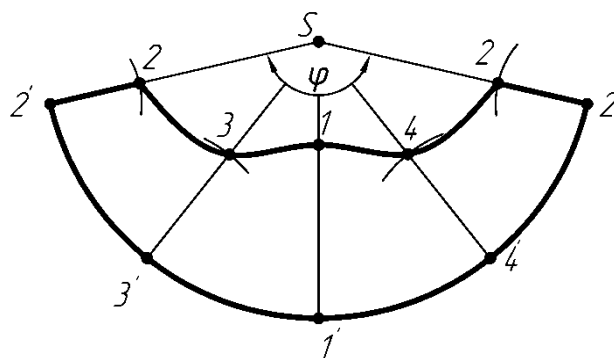


Рис. 6.33

## 6.8. Переріз циліндра площиною загального положення

В загальному випадку побудова проєкцій лінії перерізу поверхні площиною є однаковою для многогранників і кривих поверхонь. Тому проєкції фігури перерізу циліндра площиною і розгортку його поверхні будують аналогічно проєкціям перерізу і розгортки призми. Отже, у нашому випадку

доцільно розглянути спрощений приклад перерізу площиною загального положення поверхні прямого кругового циліндра. Нехай заданий прямий круговий циліндр висотою  $h$ , основа якого лежить у площині  $\Pi_1$ , в основі циліндра – коло радіусом  $R$  з центром у точці  $K(K_1, K_2)$ , перерізаний січною площиною загального положення  $\alpha(ABC)$  (рис. 6.34). Необхідно побудувати проекції і натуральну величину фігури перерізу й розгортку бокової поверхні зрізаного циліндра.

Аналіз взаємного розміщення поверхні циліндра й січної площини показує, що січна площина не паралельна і не перпендикулярна до твірних циліндра. Отже, фігура перерізу – еліпс, вища  $M$  і нища  $N$  точки якого лежать на лінії найбільшого нахилу до  $\Pi_1$  січної площини. Для побудови лінії найбільшого нахилу до  $\Pi_1$  січної площини  $\alpha$  через вісь циліндра проводять горизонтально-проекціюючу площину  $\beta$ , перпендикулярну до горизонталі січної площини. У нашому випадку пряма  $AB$ , що задає січну площину, одночасно є її горизонталлю ( $A_2B_2//x$ ). Тому через  $K_1 \equiv O_1$  проводять  $h_\beta \perp A_1B_1$ . Лінія найбільшого нахилу  $l$  лежить у горизонтально-проекціюючій площині  $\beta$ . Отже,  $l_1 \equiv h_\beta$ . Горизонтально-проекціююча площина  $\beta$  перетинає лінії, які задають січну площину  $\alpha$  в точках  $F(h_\beta \cap C_1B_1 = F_1)$  і  $E(h_\beta \cap A_1B_1 = E_1)$ . Прямим проекціюванням  $F_1$  і  $E_1$  на  $B_2C_2$  і  $A_2B_2$  отримують  $F_2$  і  $E_2$ , через  $F_2$  і  $E_2$  будують  $l_2$ .

Горизонтальна проекція великої осі еліпса проходить через точки  $M_1$  і  $N_1$ , що є вищою і нижчою точками фігури перерізу прямого циліндра, основа якого паралельна до  $\Pi_1$ , накладається на горизонтальну проекцію циліндра. Отже,  $M_1$  і  $N_1$  є точками перетину  $l_1$  з горизонтальною проекцією основи циліндра. Прямим проекціюванням  $M_1$  і  $N_1$  на  $l_2$  знаходять  $M_2$  і  $N_2$ , прямим проекціюванням  $O_1$  на  $l_2$  знаходять  $O_2$  – фронтальну проекцію центра еліпса, в якому перетинаються велика і мала осі еліпса.

Для побудови проекцій малої осі еліпса  $DZ$  через  $O_2$  проводять горизонтальну площину  $\sigma(f_\sigma)$ , яка перерізає січну площину  $\alpha$  по прямій  $h$ . При цьому  $h$  є однією з горизонталей площини  $\alpha$ , отже  $h_1//A_1B_1$  і  $h_2//A_2B_2$ . Таким чином через  $O_1$  проводять пряму, паралельну до  $A_1B_1$  й отримують  $h_1$ . Площина  $\sigma$  перерізає заданий циліндр по колу, горизонтальна проекція якого збігається з горизонтальною проекцією основи циліндра. Тому горизонтальні проекції кінцевих точок малої осі еліпса  $D_1Z_1$  лежать на перетині  $h_1$  з горизонтальною проекцією основи циліндра. Прямим проекціюванням  $D_1$  і  $Z_1$  на  $h_2$  отримують  $D_2$  і  $Z_2$ . Для виконання побудови проекцій фігури перерізу необхідно побудувати проекції проміжних її точок  $S$  і  $U$ , які лежать на крайніх твірних циліндрах. Для цього через  $O$  проводять фронтальну площину  $\pi(h_\pi/x_{12})$ , яка перетинає січну площину  $\alpha$  по фронталі  $f(f_1 \equiv h_\pi)$  у точках  $I_1(f_1 \cap C_1A_1 = I_1)$  і  $Q_1(f_1 \cap C_1B_1 = Q_1)$ , прямим проекціюванням  $I_1$  і  $Q_1$  на  $C_2A_2$  і  $C_2B_2$  отримують  $I_2$  і  $Q_2$ , через  $I_2$  і  $Q_2$  проводять  $f_2$ , прямим проекціюванням  $S_1$  і  $U_1$  на  $f_2$  отримують  $S_2$  і  $U_2$ .

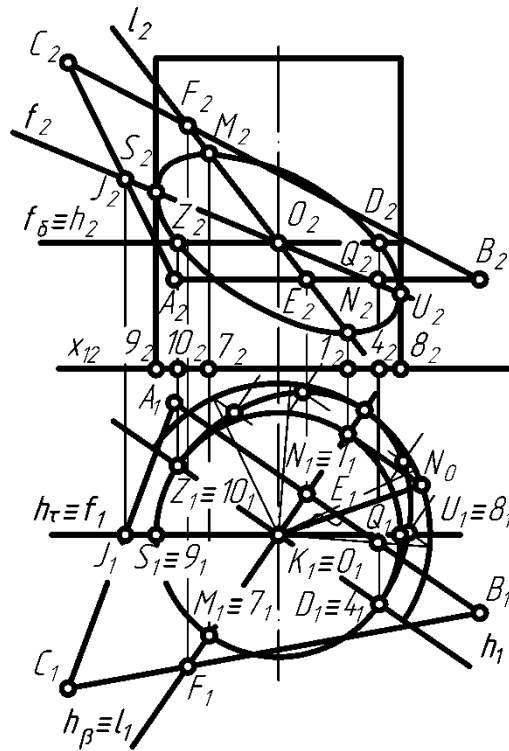


Рис. 6.34

Як було зазначено вище, горизонтальна проекція еліпса збігається з горизонтальною проекцією заданого циліндра. Фронтальну проекцію еліпса будують використовуючи описаний вище метод спряжених діаметрів (паралелограма).

Дійсну величину еліпса будують використовуючи метод двох концентричних кіл, діаметри яких дорівнюють великій і малій осям. Для використання даного методу необхідно знати натуральні величини великої  $MN$  і малої  $DZ$  осей еліпса. Оскільки положення малої осі  $DZ$  еліпса збігається з положенням однієї з горизонталей заданої січної площини, то натуральна величина малої осі еліпса дорівнюють  $D_1Z_1$ .

Для знаходження натуральної величини великої осі  $MN$  еліпса використовують метод її обертання навколо лінії рівня. У нашому випадку достатньо знайти натуральну величину півосі  $NO$ . Тоді точку  $N_1$  виділяють як об'єкт обертання, за вісь обертання приймають горизонталь  $h$ , горизонтальна проекція площини обертання збігається з  $l_1$ , горизонтальна проекція центра обертання –  $O_1$  і горизонтальна проекція радіуса обертання –  $N_1O_1$ . Натуральну величину радіуса обертання визначають з допомогою методу прямокутного трикутника. Виконавши обертання точки  $N$  навколо осі  $h$  знаходять натуральну величину половини великої осі еліпса, будують відповідні концентричні кола і з  $O_1$  проводять пучок променів до перетину з даними колами. З точок перетину побудованих променів з великим колом проводять відрізки, паралельні до малої осі еліпса, а з точок перетину тих же променів з малим колом проводять відрізки, паралельні до великої осі еліпса. Перетин відрізків, проведених з одних і тих самих променів, дають точки еліпса. Для побудови натуральної величини даного еліпса отримані точки послідовно сполучають лекальною кривою.

Оскільки розглядають прямий круговий циліндр, основа якого лежить у площині  $\Pi_1$ , твірні зрізаної його поверхні проєкціюються на  $\Pi_2$  в натуральну величину.

Побудову розгортки бокової поверхні даного циліндра, виконують аналогічно побудові розгортки бокової поверхні призми. Для цього на вільному місці креслярського паперу проводять горизонтальну пряму (рис. 6.35), і відкладають на ній відрізок, що дорівнює довжині кола, яке лежить в основі циліндра  $l = \pi d = 2\pi R$ . Натуральну величину (горизонтальну проєкцію) основи циліндра ділять на дорівнюють частини (наприклад на 12), починаючи з найкоротшої твірної  $n$ , що проходить через нижчу точку фігури перерізу  $N$ . На таку ж кількість рівних частин ділять розгортку основи циліндра. Через кожен побудовану точку на розгорнутій основі проводять перпендикуляр, на якому відкладають натуральну величину відповідної твірної зрізаного циліндра, положення якої знаходять прямим проєкціюванням на фронтальну проєкцію циліндра. Для цього точки, отримані на горизонтальній проєкції основи циліндра під час поділу її на дорівнюють частини, перепроєкційовують на фронтальну проєкцію основи даного циліндра і проводять через них проєкції твірних до перетину з фронтальною проєкцією фігури перерізу. Отримані на твірних розгортки точки з'єднують з допомогою лекала плавною кривою лінією й отримують розгортку бокової поверхні зрізаного циліндра.

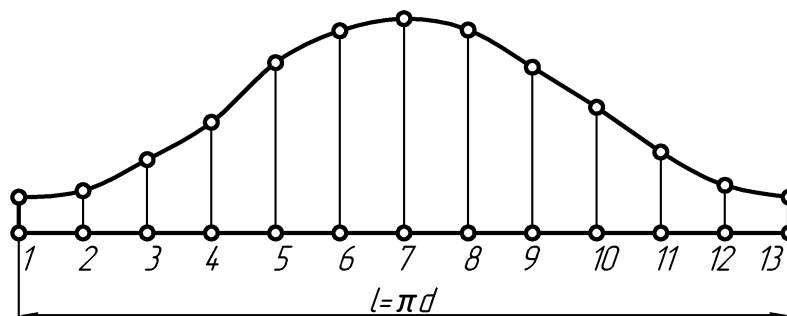


Рис. 6.35.

## Розділ 7

### Побудова проекцій ліній взаємного перетину поверхонь

#### 7.1. Загальні відомості й основні принципи побудови ліній взаємного перетину поверхонь

Задачі на побудову ліній взаємного перетину поверхонь мають широке практичне застосування в техніці. Лінія взаємного перетину поверхонь – це геометричне місце точок, які одночасно належать двом поверхням, що перетинаються. В загальному випадку така лінія є просторовою кривою, яка може розпадатися на частини. В окремих випадках такі частини можуть бути плоскими кривими. При перетині двох алгебричних поверхонь лінія їх взаємного перетину має порядок, що дорівнює добутку порядку поверхонь, які перетинаються. Лінію взаємного перетину двох поверхонь обертання називають квадроїдом.

Для визначення характеру лінії взаємного перетину поверхонь проводять аналіз їхнього взаємного розташування. При цьому розрізняють шість випадків, які залежать від розташування зон, що не перетинаються:

1. Обидві зони, які не перетинаються, знаходяться на основі однієї поверхні. Тут має місце повне внутрішнє проникнення однієї поверхні в другу. В цьому випадку лінія взаємного перетину розпадається на дві замкнені лінії – лінію входу і лінію виходу.

2. Зони, які не перетинаються, знаходяться по одній на кожній основі поверхонь, що перетинаються. У цьому випадку існує одна замкнена лінія перерізу. Цей випадок називають врізуванням.

3. Існує лише одна зона, яка не перетинається. У цьому випадку поверхні мають внутрішнє стикання, а лінія перетину має лише одну подвійну точку.

4. Поверхні перетинаються, але зон, які не перетинаються, не існує. У цьому випадку в перетині поверхонь беруть участь усі твірні. Поверхні мають внутрішнє двобічне стикання. Лінія перетину має дві подвійні точки.

5. Зон, які не перетинаються, не існує. У цьому випадку має місце стикання поверхонь уздовж спільної лінії.

6. Поверхні не перетинаються і їх відношення має мимобіжний характер.

Для побудови проекцій лінії взаємного перетину поверхонь будують проекції окремих точок, які лежать на даній лінії. Загальним способом побудови даних точок є спосіб поверхонь-посередників. Спосіб полягає в тому, що поверхня-посередник перетинає задані поверхні по лініях, які, у свою чергу, перетинаються й отримані точки перетину одночасно належать заданим поверхням, тобто лежать на шуканій лінії взаємного перетину заданих поверхонь.

Щоб забезпечити простоту побудови поверхні, посередники повинні перетинати задані поверхні по лініях простої форми (прямих, ламаних з прямими ділянками, колах). Тому в якості поверхонь посередників використовують площини і сфери. В деяких випадках доцільно використовувати конічні та циліндричні поверхні. Вибір поверхні посередника залежить від виду поверхонь, розміщення їх відносно площин проекцій і між собою.

Для спрощення процесу побудови множину точок, з яких складається лінія взаємного перетину поверхонь, поділяють на характерні (опорні) й довільні (проміжні) точки.

Характерні точки займають особливе положення на лінії взаємного перетину поверхонь або їх виділяють розміщенням відносно площин проекцій. До характерних точок відносять:

- точки, проекції яких лежать на проекціях контурних ліній однієї з поверхонь, або точки, що відділяють видиму частину лінії від невидимої;
- крайні точки – праві й ліві, найнижчі й найвищі, найближчі й найбільше віддалені від площин проекцій.

Усі інші точки, які належать лінії взаємного перерізу двох поверхонь, називають проміжними або довільними.

Починати побудову проекцій лінії взаємного перетину двох поверхонь рекомендують з визначення проекцій усіх характерних точок. Якщо вони на окремих ділянках не виявляють характеру кривої, то крім них будують проекції проміжних точок, які підвищують точність побудови й допомагають з'ясувати характер лінії перетину.

Правильність побудови залежить від правильного з'єднання отриманих точок і визначення видимості окремих ланок лінії взаємного перетину поверхонь. Визначення послідовності з'єднання отриманих проекцій точок потребує добре розвиненого просторового уявлення. Тому для спрощення вирішення цього питання використовують метод безпосереднього обходу; метод побудови умовних розгортки; табличний метод; діаграмний метод; метод цифрових позначок.

Під час використання методу безпосереднього обходу порядок з'єднання проекцій точок визначають обходом їх на основі поверхні. Якщо при цьому процес доходить до зон, які не перетинаються, то обхід повертають у зворотному напрямку.

При визначенні видимості окремих ланок лінії перетину поверхонь виходять з таких міркувань:

1) для кривих поверхонь видимими є точки, отримані на перетині двох видимих твірних або видимих відрізків лінії перетину. Якщо хоча б один з цих елементів є невидимим, то і відповідна точка лінії взаємного перетину буде невидимою;

2) для гранних поверхонь видимими є точки, які лежать на видимих гранях або видимих ланках ліній взаємного перетину. Якщо хоча б одна грань невидима, то й відповідна точка лінії взаємного перетину буде невидимою;

3) видимість для кожної з проєкцій заданих поверхонь визначають власним чином.

Як було зазначено вище, для побудови проєкцій лінії взаємного перетину поверхонь в якості поверхонь посередників, як правило, використовують площини або сфери. У зв'язку з цим побудову проєкцій взаємного перетину поверхонь виконують методом січних площин або методом січних сфер. У свою чергу, метод січних площин поділяють на метод січних площин особливого положення і метод січних площин загального положення, а метод січних сфер поділяють на метод концентричних січних сфер і метод ексцентричних січних сфер.

Метод січних площин особливого положення (метод конкуруючих ліній) використовують у випадках, коли одна з поверхонь перпендикулярна до однієї з площин проєкцій, а інша займає довільне положення (використовують проєкціюючі січні площини), або основи заданих поверхонь паралельні до однієї з площин проєкцій, а їхні осі симетрії паралельні між собою й паралельні до іншої площини проєкцій (використовують площини рівня).

Метод січних площин загального положення (метод додаткового проєкціювання) використовують у випадках коли задані поверхні нахилені (займають загальне положення). Особливо доцільно використовувати даний метод, якщо основи поверхонь лежать у площині проєкцій.

Метод концентричних січних сфер використовують у випадках, коли задані поверхні обертання мають спільну площину симетрії, їхні осі симетрії перетинаються і паралельні до однієї з площин проєкцій.

Метод ексцентричних січних сфер використовують у випадках, коли задані поверхні обертання мають спільну площину симетрії, але осі симетрії не перетинаються. При цьому центри січних сфер можуть знаходитися у різних точках осі симетрії однієї з заданих поверхонь.

## **7.2. Побудова проєкцій лінії взаємного перетину двох поверхонь, одна з яких проєкціююча**

Найпростішим випадком взаємного перетину двох поверхонь є такий, коли одна з поверхонь займає проєкціююче положення. Проєкціюючими можуть бути призматичні або циліндричні поверхні, грані або твірні яких перпендикулярні до площини проєкцій. Згідно з властивостями проєкціюючих фігур одна проєкція лінії взаємного перетину поверхонь збігається з виродженою проєкцією проєкціюючої поверхні. При цьому задачу зводять до побудови другої проєкції лінії взаємного перетину поверхонь за принципом належності геометричній фігурі.

Нехай необхідно побудувати проєкції лінії взаємного перетину двох кругових циліндрів, осі яких займають мимобіжне положення одна відносно другої. При цьому поверхня одного з циліндрів перпендикулярна до  $\Pi_1$  (рис. 7.1).



Оскільки поверхня одного із заданих циліндрів є горизонтально-проекційною, то горизонтальна проекція лінії взаємного перетину вироджується у дугу  $A_1B_1$ , яка є частиною кола, в яке, у свою чергу, вироджується горизонтальна проекція даного циліндра. Для побудови фронтальної проекції лінії взаємного перетину заданих циліндрів використовують горизонтально-проекційючі площини, які перетинають дані циліндри по твірних.

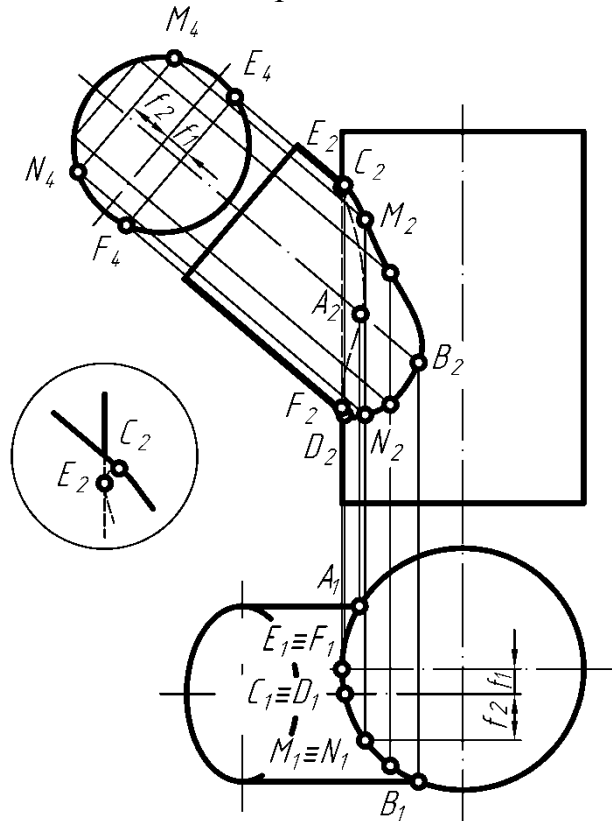


Рис. 7.1

Побудову починають із визначення положення характерних точок лінії взаємного перетину. Точки  $A$  і  $B$  є найближчою і найдалішою; точки  $C$  і  $D$  – найвищою і найнижчою, вони ж є точками видимості другого циліндра для  $\Pi_2$ ; точки  $E$  і  $F$  – найлівіші, вони ж є точками видимості першого циліндра для  $\Pi_2$ .

Точки  $A$  і  $B$  є точками перетину горизонтальних проекцій обрисових твірних похилого циліндра з горизонтальною проекцією циліндра, перпендикулярного до  $\Pi_1$ . Прямим проекціюванням  $A$  і  $B$  на фронтальну проекцію осі похилого циліндра знаходять  $A_2$  і  $B_2$ . Точки  $C_1 \equiv D_1$  є точками перетину горизонтальної проекції осі симетрії похилого циліндра з горизонтальною проекцією циліндра, перпендикулярного до  $\Pi_1$ . Прямим проекціюванням  $C_1$  і  $D_1$  на фронтальні проекції обрисових твірних похилого циліндра знаходять  $C_2$  і  $D_2$ . Точки  $E$  і  $F$  лежать на обрисовій твірній циліндра, перпендикулярного до  $\Pi_1$ , отже  $E_1 \equiv F_1$  розміщені на горизонтальній осі симетрії горизонтальної проекції основи циліндра, перпендикулярного до  $\Pi_1$ . Для побудови  $E_2$  і  $F_2$ , а також проекцій проміжних точок використовують додаткову площину проекцій  $\Pi_4$ , на яку похилий циліндр проекціюється у коло. Порядок побудови  $E_2$  і  $F_2$  і проекції проміжних точок наведено на рисунку.

У виносному елементі показана лінія взаємного перетину з точками видимості  $C$  і  $E$  у збільшеному вигляді.

**Завдання 7.1.** Побудувати проекції лінії взаємного перетину тригранної піраміди з основою  $ABC$  ( $A_1B_1C_1$ ,  $A_2B_2C_2$ ) і вершиною  $S$  ( $S_1$ ,  $S_2$ ) і чотиригранної призми з основою  $DEGL$  ( $D_1E_1G_1L_1$ ,  $D_2E_2G_2L_2$ ) і висотою  $h$  (рис. 7.2).

**Розв'язування.** Аналіз взаємного розміщення заданих поверхонь дозволяє зробити висновок, що обидві зони непересічності знаходяться на основі чотиригранної призми. Отже, має місце повне проникнення поверхні піраміди у поверхню призми. В нашому випадку лінія взаємного перетину розпадається на дві замкнені ламані лінії.

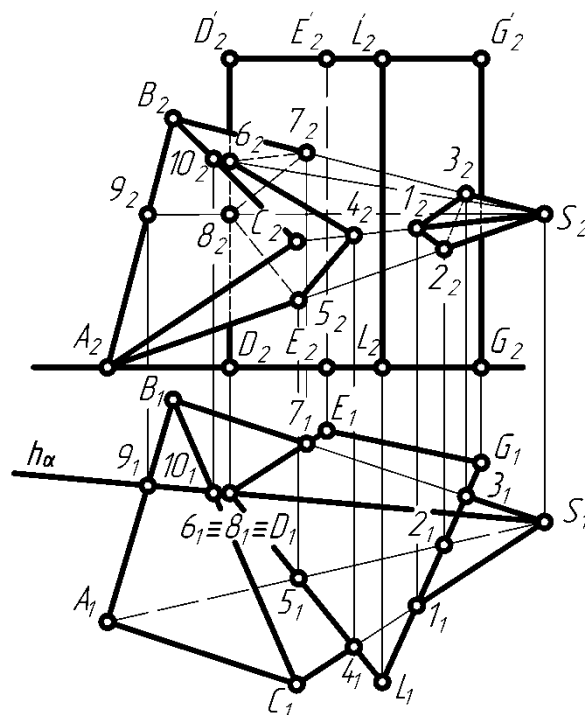


Рис. 7.2

Побудову проекцій ліній взаємного перетину заданих поверхонь виконують, використовуючи метод ребер. Тобто знаходять проекції точок перетину ребер піраміди з гранями призми і ребер призми з гранями піраміди. Побудова проекцій точок перетину ребер піраміди з гранями призми спрощена, оскільки бокова поверхня призми перпендикулярна до її основи (призма пряма) і займає горизонтально-проекціююче положення. Отже, горизонтальні проекції точок перетину ребер піраміди з гранями призми визначають без допоміжних побудов ( $C_1S_1 \cap L_1G_1 = 1_1$ ,  $C_1S_1 \cap L_1D_1 = 4_1$ ,  $A_1S_1 \cap L_1G_1 = 2_1$ ,  $A_1S_1 \cap L_1D_1 = 5_1$ ,  $B_1S_1 \cap L_1G_1 = 3_1$ ,  $B_1S_1 \cap D_1E_1 = 7_1$ ). Прямим проекціюванням  $1_1$  і  $4_1$  на  $C_2S_2$  отримують  $1_2$  і  $4_2$ , прямим проекціюванням  $2_1$  і  $5_1$  на  $A_2S_2$  отримують  $2_2$  і  $5_2$ , прямим проекціюванням  $3_1$  і  $7_1$  на  $B_2S_2$  отримують  $3_2$  і  $7_2$ .

Поверхню піраміди перетинає ребро призми, яке виходить з вершини  $D$ . Для побудови точок перетину, що лежать на даному ребрі, використовують горизонтально-проекціюючу січну площину  $\alpha(h_\alpha)$ , яка проходить через

ребро призми і вершину піраміди. Січна площина  $\alpha$  перетинає грані піраміди по лініях  $S9$  і  $S10$ , а ребро  $D$  перетинає дані грані в точках  $6$  і  $8$ , які належать шуканій лінії взаємного перетину поверхонь. Для побудови фронтальних проєкцій точок  $6$  і  $8$  будують фронтальні проєкції ліній перетину січної площини з гранями піраміди  $S_29_2$  і  $S_210_2$ , прямим проєкціюванням  $6_1$  на  $S_210_2$  отримують  $6_2$ , прямим проєкціюванням  $8_1$  на  $S_29_2$  отримують  $8_2$ .

З'єднують між собою однойменні проєкції точок, які лежать на одній грані відрізками прямих ліній і отримують проєкції ліній взаємного перетину заданих піраміди і призми. Під час побудови проєкцій ліній взаємного перетину поверхонь враховують, що видимими є тільки ті ділянки кривої, які належать видимим граням. Їх зображають суцільними основними лініями. Невидимі ділянки зображають штриховими лініями.

### 7.3. Побудова проєкцій лінії взаємного перетину двох нахилених поверхонь

Якщо задані поверхні займають загальне положення відносно площин проєкцій, то в якості січних площин-посередників для побудови проєкцій ліній взаємного перетину використовують площини загального положення. При цьому січні площини-посередники повинні перетинати обидві поверхні по твірних або бокових гранях.

Якщо у взаємному перетині беруть участь конуси чи піраміди, то січні площини повинні проходити через пряму, яка сполучає вершини поверхонь, коли одна з поверхонь, що перетинаються – конус або піраміда, а друга – циліндр або призма, то січні площини-посередники повинні проходити через пряму, яка проходить через вершину конуса або піраміди і паралельна до твірних циліндра або бокових ребер призми. Якщо у взаємному перетині беруть участь циліндри або призми, то січні площини повинні бути паралельними до площини паралелізму, яку задають двома прямими, що перетинаються і відповідно паралельні до твірних циліндрів або бокових ребер призми.

Нехай необхідно побудувати проєкції ліній взаємного перетину двох пірамід, основи яких паралельні до  $\Pi_1$  (рис. 7.3).

Аналіз взаємного розміщення заданих поверхонь дозволяє зробити висновок, що зони непересічності знаходяться по одній на кожній основі заданих пірамід. У цьому випадку існує одна замкнена лінія перерізу.

Кожна з січних площин проходить через одне з бокових ребер заданих пірамід і пряму, яка сполучає їхні вершини. Множину площин, які мають спільну пряму, називають пучком. Отже, для побудови проєкцій пучка січних площин проводять пряму  $SS'(S_1S'_1, S_2S'_2)$  і будують проєкції її горизонтального сліду  $H(H_1, H_2)$ . Для графічного визначення взаємного розміщення заданих пірамід будують горизонтальні сліди січних площин, які відповідно проходять через  $H_1$  і горизонтальні проєкції вершин основ пірамід. Кожна січна площина проходить через ребро однієї піраміди і перетинає

грань іншої піраміди по твірній. Сліди таких площин проходять через вершини основи однієї піраміди і перетинають основу іншої піраміди, а самі січні площини називають ефективними. Січні площини, які проходять через ребра  $FS^I$  і  $AS$ , не відносять до ефективних, оскільки їхні горизонтальні сліди не перетинають основи іншої піраміди.

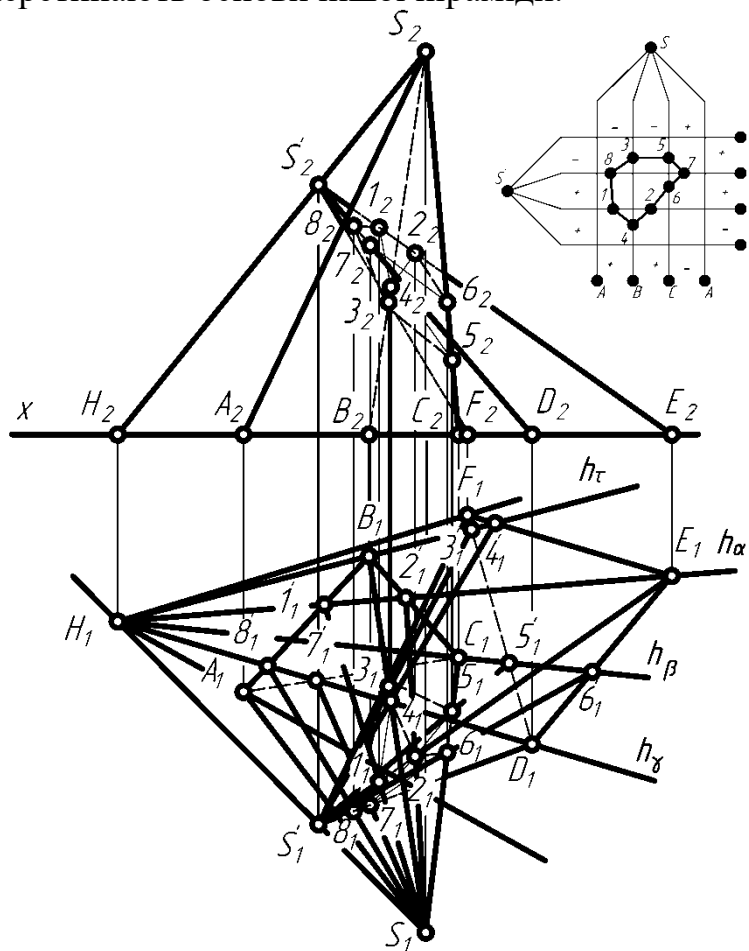


Рис. 7.3

Будують проекції точок перетину ребер  $S'E$  з пірамідою  $SABC$ . Для цього розглядають січну площину  $\alpha$ , яка проходить через  $SS'$  і  $S'E$  і перерізає  $\Pi_1$  по горизонтальному сліду  $h_\alpha$ .  $h_\alpha$  перерізає основу першої піраміди в точках  $1'_1$  і  $2'_1$  ( $h_\alpha \cap A_1B_1 = 1'_1$ ,  $h_\alpha \cap B_1C_1 = 2'_1$ ), а площина  $\alpha$  перерізає грані  $A_1S_1B_1$  і  $B_1S_1C_1$  відповідно по твірних  $1_1S_1$  і  $2_1S_1$ . Ребро  $S'E$  перетинає грань  $AS'B$  у точці  $1(S'_1E_1 \cap 1'_1S_1 = 1_1)$ , а грань  $BSC$  – у точці  $2(S'_1E_1 \cap 2'_1S_1 = 2_1)$ , прямим проєкціюванням  $1_1$  і  $2_1$  на  $S'_2E_2$  отримують  $1_2$  і  $2_2$ .

Аналогічно будують проекції точок  $3, 4, 5, 6, 7, 8$ . Перевірку точності побудови виконують, використовуючи твірні, отримані в результаті перерізу бокових ребер заданих пірамід січними площинами.

Внаслідок дослідження всіх ребер отримують вісім точок, які належать просторовій ламаній лінії перетину двох пірамід. Для правильного з'єднання отриманих точок ланками прямих та визначення видимості ланок шуканої ламаної лінії взаємного перетину пірамід необхідно пам'ятати, що:

- 1) лінія перетину двох замкнених многогранників є замкнена ламана;
- 2) можна послідовно з'єднати тільки ті точки, які лежать на одній грані;
- 3) якщо ланка лінії перетину належить хоча б одній невидимій грані, то вона буде невидимою;
- 4) на видимих гранях лежать видимі точки, на невидимих – невидимі;
- 5) з видимих точок виходять видимі ребра, з невидимих – невидимі;
- 6) частини ребер (або твірних) одного із тіл, що знаходяться у межах другого тіла, на кресленні не показують.

Якщо задані многогранники мають велику кількість ребер і число отриманих точок – вершин лінії взаємного перетину поверхонь велике, то для визначення положення вершин, порядку їх з'єднання і визначення видимості ланок ламаної лінії будують схему розміщення точок. Така схема являє собою накладені схематичні розгортки бічних поверхонь тіл, що перетинаються, у нашому випадку – пірамід.

Прямі лінії схеми є ребра, а простір між ними – грані многогранників. Видимі й невидимі грані многогранників на відповідних площинах проєкцій на схемі уявно позначають знаками плюс і мінус. У лівому нижньому і правому верхньому кутах схеми поставлені позначення площин проєкцій  $\Pi_1$  і  $\Pi_2$  і навпроти кожної із них по вертикалі й горизонталі відмічені знаками плюс і мінус видимі й невидимі грані пірамід. Після побудови “схеми розгортки” наносять на неї отримані точки – вершини. Наприклад, точку **1** відмічають на ребрі  $S'E$  і на грані  $SAB$ , оскільки вона їм належить, точку **2** – на ребрі  $S'E$  і на грані  $SBC$ . Аналогічно позначають решту точок.

Після нанесення всіх точок на “схему розгортки” їх з'єднують так, щоб ланки з'єднання **13**, **35** та інші не перетинали ребер, тобто з'єднують ті точки, які лежать в одній клітинці схеми. Коли виявиться, що якоїсь ланки неможна з'єднати, щоб вона не перетинала ребра, то це означає, що побудова виконана неправильно й необхідно виявити помилку шляхом ретельного перевіряння.

Оскільки лінія взаємного перетину є замкненою лінією, то, будуючи її ланки з точки **1** за рухом годинникової стрілки, обов'язково повертаються до точки **1**. У даному випадку отримують одну замкнену лінію. У такому ж порядку, як з'єднані точки на схемі, з'єднують і їхні проєкції на комплексному кресленні.

Видимість ланок лінії взаємного перетину на кресленні визначають так:

- 1) на горизонтальній проєкції ланка **13** утворилася від перетину грані  $ASB$  (+) і грані  $ES'D$  (+). Обидві грані видимі (мають додатні знаки), отже ця ланка буде видимою. Ланка **35** утворена гранню  $ASB$  (+) і гранню  $DS'F$  (-), отже вона буде невидимою і її зображають штриховою лінією. Аналогічно визначають видимість інших ланок;

2) на фронтальній проекції ланки **13** і **35** відповідно утворені гранями **ASB** (-) і **DS'E** (+) та **ASB** (-) і **DS'F** (+), які мають різні знаки, а тому ці ланки зображають лініями невидимого контуру. Аналогічно визначають видимість решти ланок.

Визначення видимості ребер виконують за загальними правилами з урахуванням перелічених вище вказівок.

У випадку взаємного перетину двох конусів усі побудови виконують аналогічно, тільки замість ребер розглядають характерні й допоміжні твірні обох конусів, а точки лінії взаємного перетину з'єднують між собою плавною кривою лінією.

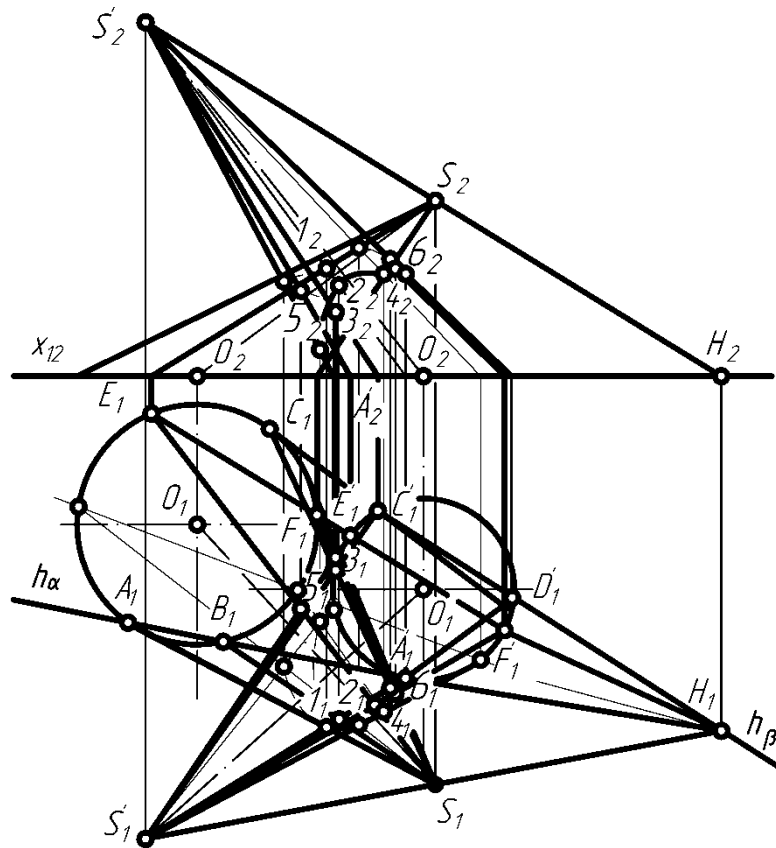


Рис. 7.4

Нехай задано два кругових похилих конуси, які перетинаються, а їхні основи розміщені у горизонтальній площині проекцій (рис. 7.4). Необхідно побудувати проекції ліній взаємного перетину заданих конусів.

Проводять лінію, спільну для всіх січних площин посередників, яка проходить через вершини заданих конусів  $SS'$  ( $S_1S'_1$ ,  $S_2S'_2$ ) і будують проекції її горизонтального сліду  $H$  ( $H_1$ ,  $H_2$ ). Через  $H$  проходять усі горизонтальні сліди січних площин посередників. Першими проводять сліди  $h_\alpha$  і  $h_\beta$ , які дотикаються до горизонтальної проекції однієї основи і перетинають горизонтальну проекцію іншої. Наявність таких слідів вказує на те, що перетин поверхонь має вид повного проникнення, і тому лінія перетину цих поверхонь розпадається на дві.

Слід  $h_\alpha$  показує, що січна площина  $\alpha$  дотикається до лівого конуса по твірній  $A'S'$  і перетинає правий конус по твірних  $AS$  і  $BS$ . Взаємний перетин

цих твірних дозволяє отримати точки  $1$  ( $A^1_1 S^1_1 \cap A_1 S_1 = 1_1$ ) і  $2$  ( $A^1_1 S^1_1 \cap B_1 S_1 = 2_1$ ). Прямим проєкціюванням будують фронтальні проєкції твірних і точки  $1_2$  і  $2_2$ .

Аналогічно площина  $\beta$  дотикається до правого конуса по твірній  $C_1 S_1$  і перетинає лівий конус по твірних  $CS$  і  $DS$ . Взаємний перетин цих твірних дозволяє отримати точки  $3$  ( $C^1_1 S^1_1 \cap C_1 S_1 = 3_1$ ) і  $4$  ( $C^1_1 S^1_1 \cap D_1 S_1 = 4_1$ ). Прямим проєкціюванням будують фронтальні проєкції твірних і точки  $3_2$  і  $4_2$ .

Горизонтальні сліди допоміжних січних площин проводять у межах слідів  $h_\alpha$  і  $h_\beta$ . Побудову проєкцій необхідної кількості точок виконують аналогічно.

Під час викреслювання проєкцій ліній взаємного перетину заданих конусів дотримуються послідовності з'єднання проєкцій отриманих точок, виконуючи обхід на основі лівого і правого конусів. Наприклад, для нижньої лінії перетину з'єднують точки у такій послідовності **1-5-3-6-1**, а для верхньої лінії – **2-8-4-7-2**.

Як було сказано вище, у випадку взаємного перетину двох поверхонь, коли вершина однієї розміщена на полі креслення, а іншої – на безкінечно великій відстані від основи, спільна пряма січних площин-посередників повинна проходити через вершину першої поверхні й бути паралельною до бокових ребер або твірних другої.

Наприклад, задано похилу тригранну піраміду і похилий круговий циліндр, які перетинаються. Основи заданих поверхонь лежать у  $\Pi_1$  (рис. 7.5). Необхідно побудувати проєкції лінії взаємного перетину заданих поверхонь.

Проекції спільної для всіх січних площин лінії проводять через вершину піраміди  $S$  ( $S_1, S_2$ ) паралельно до твірних конуса і будують проєкції її горизонтального сліду  $H$  ( $H_1, H_2$ ). Через горизонтальні проєкції вершин основи піраміди і  $H_1$  проводять сліди січних площин. Усі побудовані сліди перетинають горизонтальну проєкцію основи циліндра. Отже перетин поверхонь має вигляд повного проникнення. Тобто лінія взаємного перетину цих поверхонь розпадається на дві.

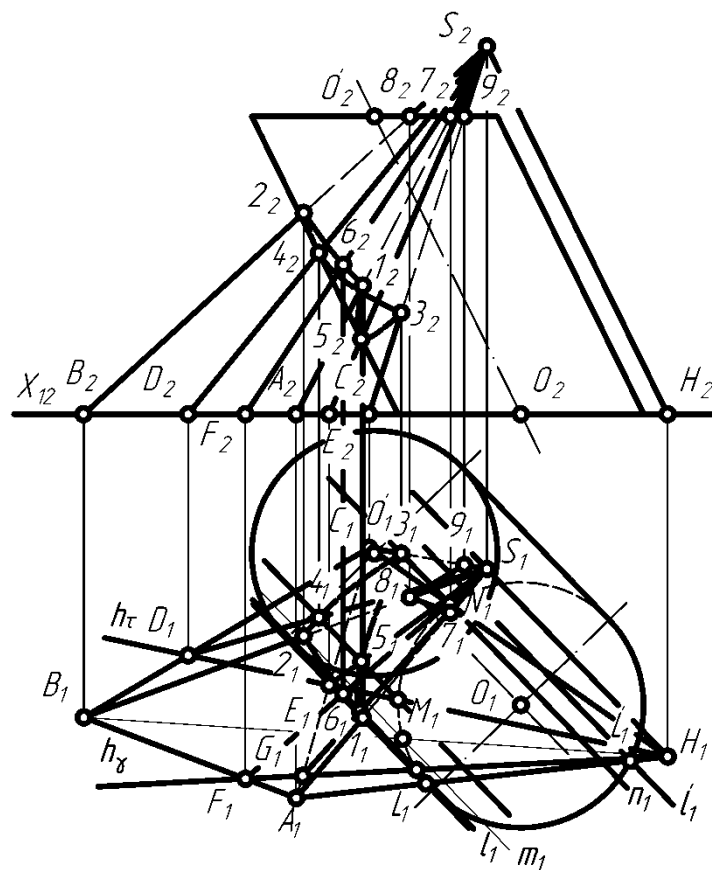


Рис. 7.5

Горизонтальні сліди січних площин перетинають горизонтальні проєкції основ заданих поверхонь у точках, через які проходять горизонтальні проєкції ліній перетину січних площин даних поверхонь. Побудову починають з характерних точок лінії взаємного перетину поверхонь. У нашому випадку такі точки лежать на бокових ребрах піраміди. Отже  $h_\alpha$  проходить через  $H_1$  і  $A_1$  і перетинає горизонтальну проєкцію основи циліндра в точках  $L_1$  і  $L'_1$ . Таким чином, січна площина  $\alpha$  перетинає поверхню піраміди по ребрі  $AS$  і поверхню циліндра по твірних  $l$  і  $l'$ , а в точці їх перетину лежить шукана точка  $I$  ( $A_1S_1 \cap l_1 = I_1$ ). Прямим проєкціюванням  $I_1$  на  $A_2S_2$  отримують  $I_2$ . Аналогічно будують проєкції точок, які лежать на ребрах  $BS$  ( $B_1S_1 \cap m_1 = 2_1$ ) і  $CS$  ( $C_1S_1 \cap n_1 = 3_1$ ).

Побудову проєкцій проміжних точок виконують, використовуючи січні площини, що перерізають грані піраміди по твірних. Наприклад, площина  $\tau$  перерізає грань  $BSC$  по твірній  $DS$  ( $h_\tau \cap A_1C_1 = E_1$ ), точки перетину яких з відповідними твірними циліндра будують аналогічно побудові точки  $I$ .

Порядок з'єднання отриманих однойменних проєкцій точок аналогічний описаному вище випадку. У нашому випадку ділянки ламаної кривої лінії є дугами еліпсів, оскільки утворені в результаті перерізу поверхні циліндра площинами, нахиленими до його основи і твірних.



Піраміда пронизує циліндр, виходячи з нього через верхню основу, на якій утворюється трикутний отвір. Проекції лінії перетину піраміди з верхньою основою циліндра будують прямим проєкціюванням, враховуючи, що основа циліндра паралельна до  $\Pi_1$ .

Якщо у поверхонь, які перетинаються, вершини невласні (циліндр, призма), то пряма, яка їх з'єднує, також невласна. Тому всі допоміжні січні площини-посередники, які проходять через цю пряму, повинні бути паралельними між собою і паралельними до площини паралелізму, яку задають двома прямими, які перетинаються і відповідно паралельні до твірних заданих поверхонь.

Нехай задано два кругові похилі циліндри, які перерізаються, а їхні основи лежать у  $\Pi_1$  (рис. 7.6). Необхідно побудувати проєкції лінії взаємного перерізу заданих поверхонь.

На вільному місці креслярського паперу вибирають довільну точку  $K(K_1, K_2)$ , через яку поводять пряму  $a(a_1, a_2)$ , паралельну до твірних правого циліндра і пряму  $b(b_1, b_2)$ , паралельну до твірних лівого циліндра, будують горизонтальний слід прямої  $a$   $H(H_1, H_2)$  і прямої  $b$   $H'(H'_1, H'_2)$  і проводять горизонтальний слід площини паралелізму  $h_\alpha$ .

Оскільки січні площини паралельні до площини паралелізму, їхні горизонтальні сліди теж паралельні. Тобто для визначення характеру перетину поверхонь і множини ефективних січних площин проводять горизонтальні сліди, паралельні до  $h_\alpha$  і дотичні до горизонтальних проєкцій основ заданих циліндрів. З побудови бачимо, що задані циліндри врізуються один в другий, тобто усі точки лінії перетину повинні замикатися в одну криву, а сліди множини ефективних січних площин розміщені між  $h_\beta$  і  $h_\epsilon$ .

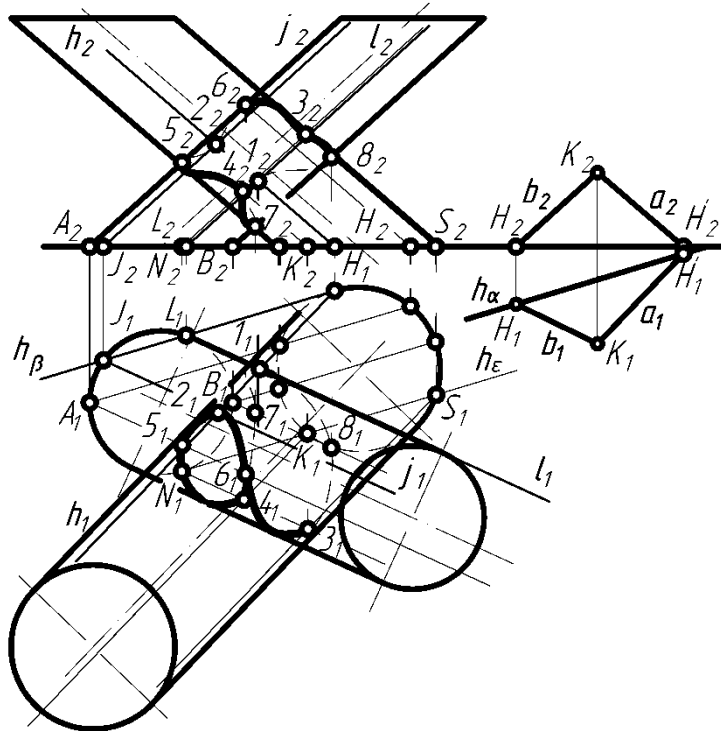


Рис. 7.6

На нижніх основах обох циліндрів визначають точки, з яких виходять твірні, на яких відповідно лежать характерні й допоміжні точки лінії взаємного перетину поверхонь. Характерні точки лежать на обрисових твірних, які виходять з точок  $A, B, C, D, E, F, G, M$ , і на твірних, через які проходять обмежуючі площини  $\beta$  і  $\Sigma$  і виходять з точок  $H, L, J, N, K, S$ . Кількість проміжних точок, а відповідно і твірних, на яких вони лежать, визначають, виходячи з умов побудови.

Побудову проекцій лінії взаємного перетину заданих циліндрів виконують аналогічно описаним вище випадкам. Тобто через відмічені твірні проводять січні площини і будують проекції точок перетину твірних лівого циліндра з поверхнею правого, і навпаки, твірних правого циліндра з поверхнею лівого. Наприклад, слід обмежуючої площини  $\beta (h_\beta)$  дотикається до основи правого циліндра в точці  $H$  і перетинає основу лівого циліндра в точках  $L$  і  $J$ . Відповідно січна площина  $\beta$  дотикається до поверхні правого циліндра по твірній, що виходить з точки  $H (h_1, h_2)$ , а поверхню лівого циліндра перетинає по твірних, які виходять з точок  $L (l_1, l_2)$  і  $J (j_1, j_2)$ . Точку  $1$  знаходять в результаті перетину твірної правого циліндра  $h$  з твірною лівого циліндра  $l (h_1 \cap l_1 = 1_1)$ , точку  $2$  знаходять у результаті перетину твірної правого циліндра  $h$  з твірною лівого циліндра  $l (h_1 \cap j_1 = 2_1)$ . Проекції інших точок, які лежать на лінії взаємного перетину заданих циліндрів, будують аналогічно.

Для визначення порядку з'єднання отриманих точок будують схему розміщення точок (рис. 7.7), за якою з'єднують однойменні проекції отриманих точок плавною кривою лінією та визначають видимість її окремих ділянок.

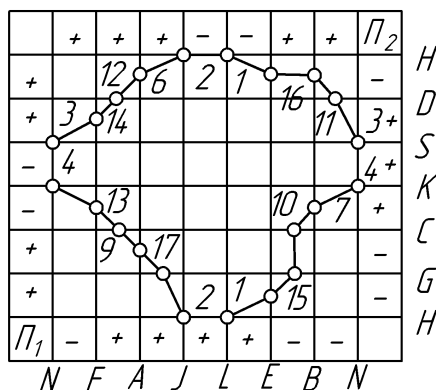


Рис. 7.7

#### 7.4. Побудова проекцій ліній взаємного перетину поверхонь методом паралельних січних площин

Метод паралельних січних площин використовують у випадках, коли осі симетрії заданих поверхонь паралельні між собою і паралельні до однієї з площин проекцій. Якщо друга умова не виконується, то необхідно використати метод заміни площин проекцій, вибрати додаткову площину проекцій, паралельну до даних осей симетрії.

Наприклад, задано прями́й круговий конус і півсферу, основи яких паралельні до  $\Pi_1$ , а вісь конуса перпендикулярна до  $\Pi_1$  (рис. 7.8). Необхідно побудувати проєкції лінії перетину заданих поверхонь.

Аналіз характеру взаємного розміщення поверхонь показує, що у нашому випадку має місце врізування конуса у півсферу, тобто існує одна лінія взаємного перетину заданих поверхонь.

Для виконання побудови в якості січних поверхонь-посередників використовують площини рівня, паралельні до  $\Pi_1$ . Такі площини перетинають задані поверхні по колах, проєкції спільних точок яких визначають проєкції лінії взаємного перетину конуса і півсфери.

Першими визначають положення найвищої і найнижчої точок. Проєкції найнижчих точок  $1$  і  $2$  визначають як проєкції перетину основ заданих поверхонь.

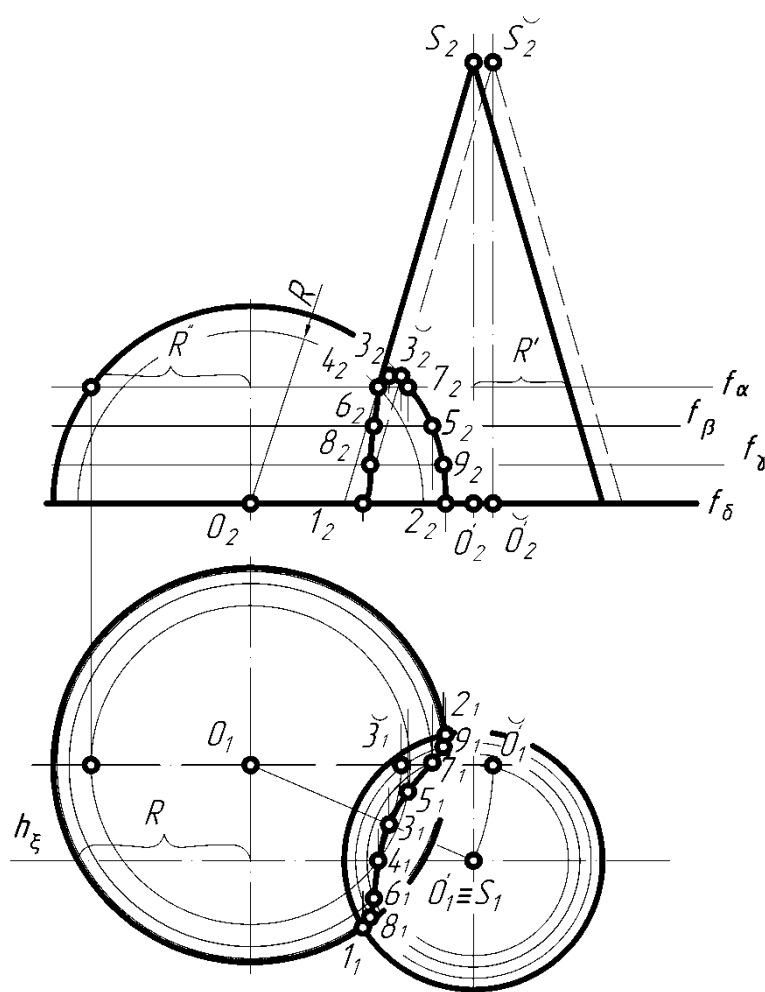


Рис. 7.8

Для визначення проєкції найвищої точки кривої взаємного перетину конуса і півсфери виконують наступну побудову. Оскільки шукана найвища точка лежить у площині симетрії обох поверхонь, що проходить через осі заданих поверхонь, виконують обертання цієї площини разом із січенням поверхонь навколо вертикальної осі півсфери до фронтального положення.

Для цього сполучають  $O_I$  і  $O^I_I$  лінією й повертають  $O_I O^I_I$  навколо  $O_I$  у положення  $\check{O}_1$ , прямим проєкціюванням будують  $\check{O}_2$  і викреслюють контури переміщеного конуса. На перетині контура твірної переміщеного конуса з фронтальною проєкцією обрису півсфери знаходять  $\check{Z}_2$ . Прямим проєкціюванням на  $O_I \check{O}_1$ , знаходять  $\check{Z}_1$ . Обертаючи точку  $\check{Z}_1$  до суміщення з  $O_I O^I_I$  знаходять  $Z_1$ , прямим проєкціюванням визначають  $Z_2$ . Якщо, згідно з умовою задачі,  $O_I O^I_I$  займає горизонтальне положення, то обертання виконувати не потрібно.

Проекції проміжних точок отримують, виконавши наступну побудову. На певній відстані від площини, яка проходить через основи заданих поверхонь, проводять допоміжну січну площину  $\alpha$ , перпендикулярну до вертикальних осей симетрії. Площина  $\alpha$  ( $f_\alpha$ ) перетинає конус по колу  $R^I$ , а півсферу по колу  $R^{II}$ . Горизонтальні проєкції цих кіл перетинаються у точках  $4_I$  і  $5_I$ . Фронтальні проєкції точок отримують прямим проєкціюванням на  $f_\alpha$ .

Аналогічно будують проєкції необхідної кількості точок для побудови лінії перетину заданих поверхонь.

Для визначення меж видимості побудованих проєкцій лінії взаємного перетину поверхонь використовують фронтальну січну площину  $\xi$ , горизонтальний слід  $h_\xi$  якої співпадає з горизонтальною віссю симетрії конуса. Така січна площина перетинає півсферу по півколу радіусом  $R$ . Побудувавши фронтальну проєкцію даного півкола, отримують фронтальну проєкцію шуканої точки  $4_2$  у місці перетину півкола з контурною твірною конуса, прямим проєкціюванням  $4_2$  на  $h_\xi$  отримують  $4_1$ .

Побудовані проєкції точок сполучають плавною кривою лінією з допомогою лекала.

**Завдання 7.2.** Побудувати проєкції лінії взаємного перетину тригранної призми з прямим круговим конусом (рис. 7.9).

**Розв'язування.** З побудови бачимо, що призма проникає крізь конус, тобто необхідно будувати дві лінії взаємного перетину. Першими визначають положення найвищих і найнижчих точок ліній взаємного перетину. Дані точки лежать на ребрах бокової поверхні призми і тому їхні проєкції визначають без додаткових побудов. На ребрі  $AA^I$  лежать точки  $1$  і  $2$ , горизонтальні проєкції яких знаходять як точки перетину  $A_1 A^I_1$  з горизонтальною проєкцією основи конуса, прямим проєкціюванням  $1_I$  і  $2_I$  на  $A_2 A^I_2$  отримують  $1_2$  і  $2_2$ . Аналогічно будують проєкції точок  $3$  ( $3_1, 3_2$ ) і  $4$  ( $4_1, 4_2$ ), які лежать на ребрі  $BB^I$ .

Для визначення проєкцій найвищих точок  $5$  і  $6$ , які лежать на ребрі  $CC^I$ , через  $C_2 C^I_2$  проводять січну площину  $\alpha$ , паралельну до  $\Pi_1$  ( $f_\alpha \equiv C_2 C^I_2$ ), яка перетинає поверхню конуса по колу радіусом  $R$ , будують горизонтальну проєкцію даного кола і в точках його перетину з  $CC^I$  визначають горизонтальні проєкції найвищих точок  $5_1$  і  $6_1$ , прямим проєкціюванням  $5_1$  і  $6_1$  на  $C_2 C^I_2$  отримують  $5_2$  і  $6_2$ .

Множина ефективних січних площин, з допомогою яких будують проміжні точки лінії взаємного перерізу, розміщена між площиною  $\alpha$  і основою конуса. Самі ж проекції проміжних точок будують аналогічно побудові проекцій точок 5 і 6. Наприклад, проводять фронтальний слід горизонтальної січної площини  $\beta$  ( $f_\beta$ ), яка перетинає поверхню призми по прямих  $DD^1$  і  $KK^1$  ( $f_\beta \equiv D_2D_2^1 \equiv K_2K_2^1$ ), а поверхню конуса – по колу радіусом  $R^1$ .

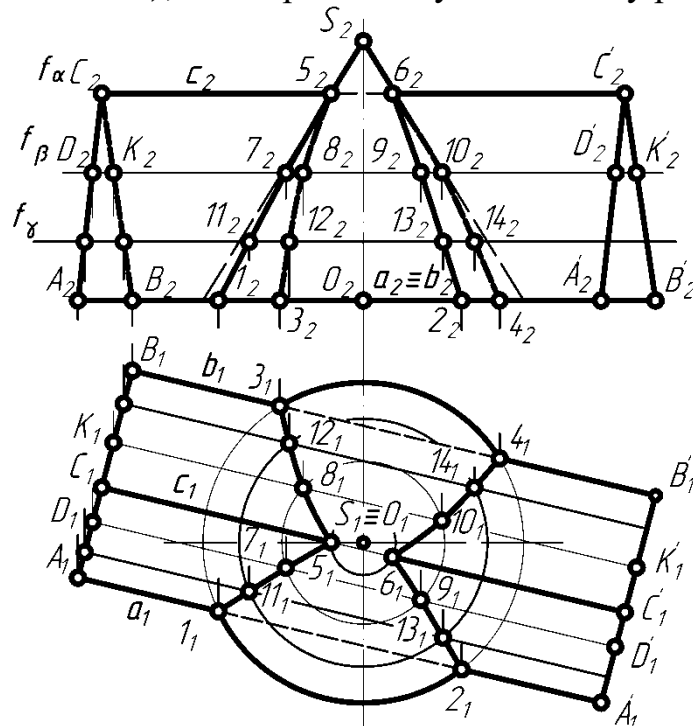


Рис. 7.9

Будують  $D_1D_1^1$ ,  $K_1K_1^1$  і горизонтальну проекцію кола  $R^1$ , визначають  $7_1$ ,  $8_1$ ,  $9_1$ ,  $10_1$ , прямим проекціюванням  $7_1$ ,  $8_1$ ,  $9_1$ ,  $10_1$  на  $D_2D_2^1$ ,  $K_2K_2^1$  отримують  $7_2$ ,  $8_2$ ,  $9_2$ ,  $10_2$ . Побудову проекцій точок 11 ( $11_1$ ,  $11_2$ ); 12 ( $12_1$ ,  $12_2$ ); 13 ( $13_1$ ,  $13_2$ ); 14 ( $14_1$ ,  $14_2$ ) виконують аналогічно, провівши фронтальний слід горизонтальної площини  $\gamma$  ( $f_\gamma$ ). Під час побудови необхідно знайти проекції точок взаємного перетину поверхонь, які лежать на крайніх твірних конуса.

Порядок сполучення отриманих однойменних проекцій точок визначають відповідно до приведених вище правил. Під час побудови враховують, що лінії взаємного перетину є ламаними кривими з ділянками еліпсів і зламами у точках, які лежать на ребрах призми.

## 7.5. Побудова проекцій ліній взаємного перетину поверхонь методом концентричних сфер

Сферу в якості січної поверхні посередника використовують завдяки її властивості перетинати поверхню обертання по колу, якщо центр сфери лежить на осі симетрії поверхні обертання. Якщо осі симетрії поверхонь обертання перетинаються і в точці їх перетину розміщена сфера, то дана сфера перетинає обидві поверхні обертання по колах. При цьому, якщо осі симетрії тіл обертання паралельні до однієї з площин проекцій, то проекції кіл перетину на цій площині проекцій вироджуються у пряму лінію.

Отже, метод концентричних сфер використовують, коли задані поверхні обертання розміщені так, що їхні осі симетрії перетинаються й паралельні до однієї з площин проєкцій. Якщо ж осі симетрії займають загальне положення відносно вибраних площин проєкцій, то для використання методу концентричних сфер необхідно, використовуючи перетворення проєкцій, домогтися необхідного розміщення осей.

Наприклад, необхідно побудувати проєкції ліній взаємного перетину кругового конуса й циліндра, осі яких перетинаються і паралельні до  $\Pi_2$  (рис. 7.10).

Аналіз характеру взаємного розміщення поверхонь показує, що у нашому випадку має місце проникнення циліндра у конус, отже необхідно будувати дві замкнені криві лінії.

За центр січних концентричних сфер приймають точку перетину осей конуса і циліндра  $O$  ( $O_1, O_2$ ). До характерних точок шуканих ліній взаємного перетину поверхонь відносять найвищі точки  $1$  і  $2$ , найнижчі точки  $3$  і  $4$  та точки перегину  $5$  і  $6$ .

Фронтальні проєкції точок  $1, 2, 3, 4$  знаходять як фронтальні проєкції точок перетину обрисових твірних заданих поверхонь. Їх горизонтальні проєкції будують прямим проєціюванням на горизонтальній проєкції осі симетрії циліндра.

Для побудови проєкцій точок  $5$  і  $6$  визначають радіус мінімальної ефективної сфери. Для цього через  $O_2$  проводять перпендикуляри до обрисових твірних заданих поверхонь. Більший із побудованих перпендикулярів і дорівнюватиме  $R_{\min}$  ефективної найменшої сфери. Така сфера буде дотикатися до однієї з поверхонь по колу діаметром  $AB$ , а з другою поверхнею буде перетинатися по колах діаметрами  $CD$  і  $EF$ .

У нашому випадку мінімальна ефективна сфера дотикається до поверхні циліндра й перетинає поверхню конуса. Кола діаметрами  $CD$  і  $EF$  перетинаються з колом діаметром  $AB$  і утворюють точки  $5$  і  $6$ . Порядок побудови фронтальних проєкцій даних точок зображено на рис. 7.10. Проводять фронтальну проєкцію найменшої ефективної сфери, яка дотикається до поверхні циліндра по колу, фронтальною проєкцією якого є відрізок  $A_2B_2$  і перетинає поверхню конуса по колах, фронтальними проєкціями яких є відрізки  $C_2D_2$  і  $E_2F_2$ . При перетині  $A_2B_2$  і  $C_2D_2$  отримують  $5_2$  ( $A_2B_2 \cap C_2D_2 = 5_2$ ), при перетині  $A_2B_2$  і  $E_2F_2$  отримують  $6_2$  ( $A_2B_2 \cap E_2F_2 = 6_2$ ).

Для подальшої побудови визначають  $R_{\max}$  – радіус найбільшої ефективної сфери як відстань від центра сфер  $O_2$  до найвіддаленішої точки перетину обрисових твірних. Відповідно до умови нашої задачі  $R_{\max} = O_23_2$ . Найменша і найбільша ефективні сфери є граничними при виборі проміжних сфер.

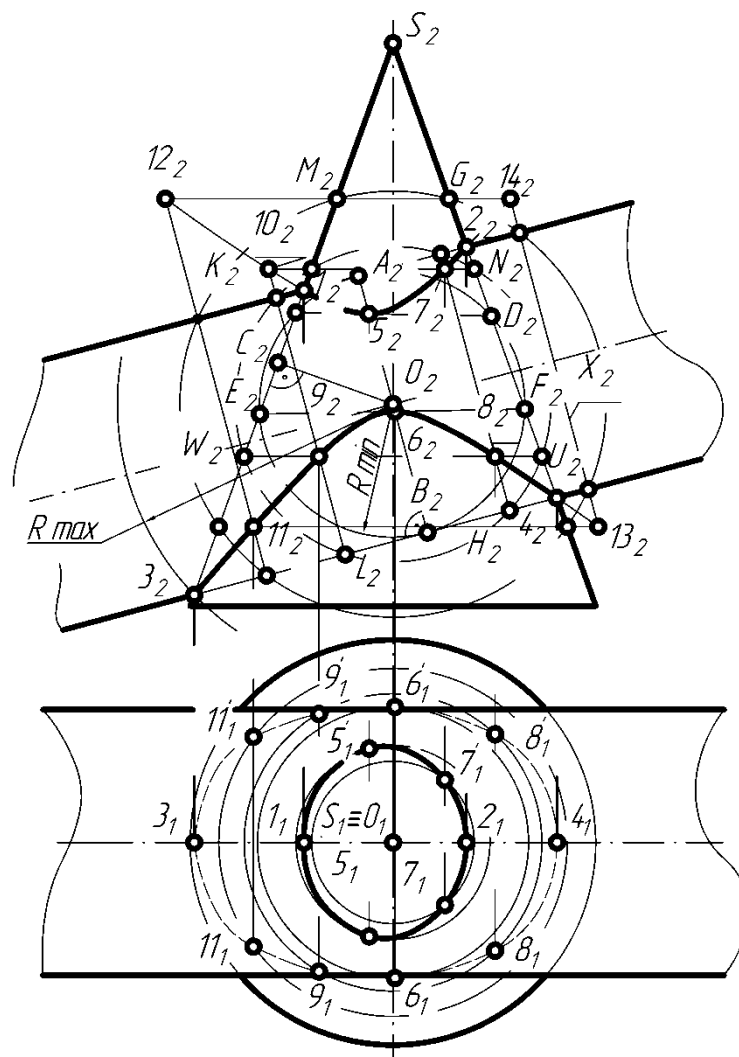


Рис. 7.10

Для побудови положень проміжних точок проводять довільну сферу з центром в точці  $O$  і радіусом  $R_{\min} < r < R_{\max}$ . Така сфера перетинає поверхню циліндра по колах діаметрами  $KL$  і  $GH$ , а поверхню конуса – по колах діаметрами  $MN$  і  $WU$ . Точки перетину цих кіл і є шуканими точками  $7, 8, 9, 10$ . Аналогічно будують проекції необхідної кількості проміжних точок.

Для побудови горизонтальних проекцій характерних і проміжних точок ліній взаємного перетину поверхонь використовують закономірності побудови проекцій точок, які лежать на відповідних поверхнях. Наприклад, для побудови горизонтальної проекції точки  $5$  використовують властивості точки, яка лежить на поверхні конуса. Тобто через  $5_2$  проводять січну площину паралельну до  $\Pi_1$ , яка перетинає конус по колу діаметром  $CD$ , будують горизонтальну проекцію даного кола і прямим проєкціюванням отримують  $5_I$  і  $5^I$ . Аналогічно отримують горизонтальні проекції всіх необхідних точок.

З'єднують побудовані однойменні проекції характерних і проміжних точок плавними кривими лініями й отримують шукані проекції ліній взаємного перетину заданих циліндра і конуса.

**Завдання 7.3.** Побудувати проекції лінії взаємного перетину кругового циліндра і напівсфери, осі симетрії яких перетинаються в точці  $O$  і паралельні до  $\Pi_2$  (рис. 7.11).

**Розв’язування.** Аналіз характеру взаємного розміщення поверхонь показує, що у нашому випадку має місце проникнення циліндра у напівсферу.

Для побудови проекцій лінії взаємного перетину заданих поверхонь використовують метод концентричних сфер. До характерних точок лінії взаємного перетину поверхонь відносять найвищу точку  $2$ , найнижчу точку  $1$  і точки перетину  $3$  і  $4$ .

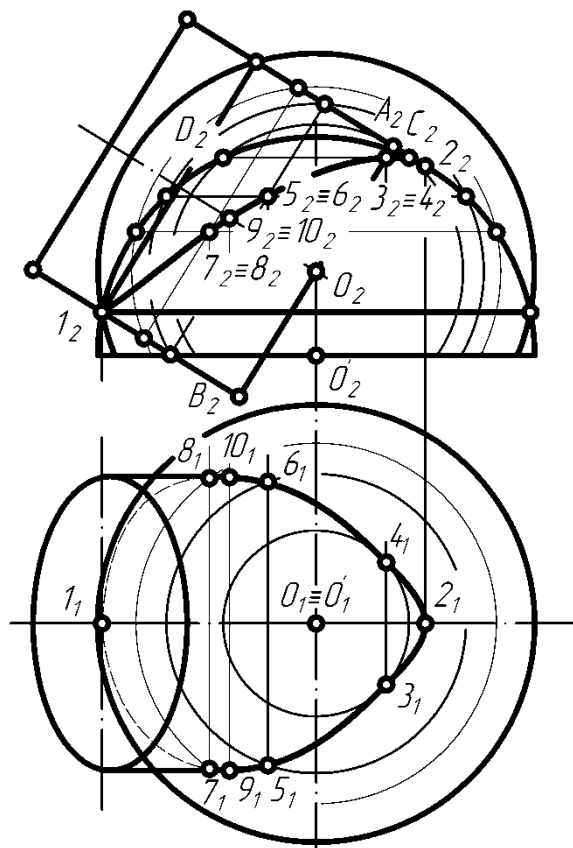


Рис. 7.11

Фронтальні проекції точок  $1$  і  $2$  знаходять, як фронтальні проекції точок перетину обрисових твірних заданих поверхонь. Їх горизонтальні проекції будують прямим проекціюванням на горизонтальні проекції осі симетрії циліндра.

Для побудови проекцій точок  $3$  і  $4$  визначають радіус мінімальної ефективної сфери. Для цього через  $O_2$  проводять перпендикуляр до обрисовій твірній циліндра і визначають найкоротшу відстань від  $O_2$  до обрисової твірної напівсфери. Більша із визначених величин і дорівнюватиме  $R_{\min}$  ефективної найменшої сфери. У нашому випадку така сфера буде дотикатися до поверхні циліндра по колу діаметром  $AB$  і перетинати поверхню півсфери по колу діаметром  $CD$ . На фронтальній проекції  $5_2=6_2$  ( $A_2B_2 \cap C_2D_2 = 5_2=6_2$ ).



Для подальшої побудови  $R_{max}$  визначають аналогічно описаному вище випадку і побудову проєкцій проміжних точок виконують аналогічно. Побудовані однойменні проєкції точок з'єднують плавними кривими лініями.

## 7.6. Побудова проєкцій ліній взаємного перетину поверхонь методом ексцентричних сфер

Метод побудови лінії взаємного перетину двох тіл обертання з допомогою січних ексцентричних сфер полягає у використанні сфер, які мають різні центри. Такий спосіб використовують у випадках, коли задані поверхні мають спільну площину симетрії, але осі симетрії не перетинаються. При цьому центри січних сфер можуть знаходитися у різних точках осі симетрії однієї з заданих поверхонь обертання.

Нехай необхідно побудувати проєкції лінії взаємного перетину прямого кругового циліндра і торової поверхні (рис. 7.12).

З побудови видно, що має місце врізання торової поверхні у поверхню конуса, тобто існує одна замкнена лінія взаємного перетину заданих поверхонь.

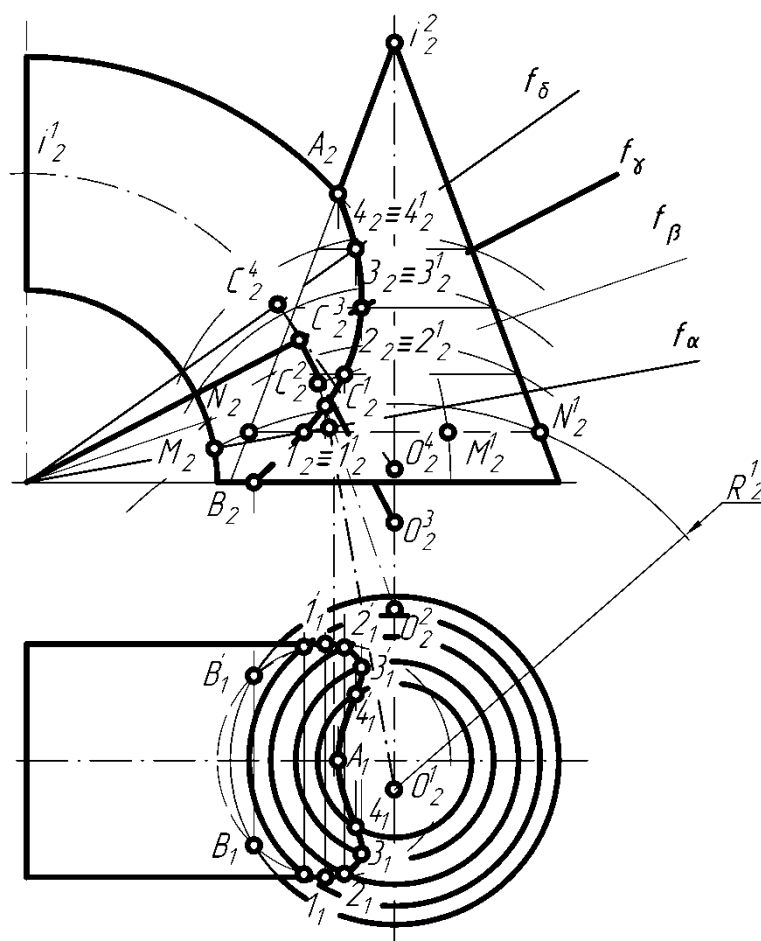


Рис. 7.12

Поверхню тора характеризують множина кіл (паралелей), які розміщені у площинах, перпендикулярних до осі  $i^I$ , та множина кіл (меридіанів),

розміщених у площинах  $\alpha, \beta, \gamma, \tau$ , які проходять через вісь  $i^1$ . Центри сфер, які перетинають поверхню тора по цих колах, знаходяться на перпендикулярах, проведених до площин даних кіл через їхні центри  $C^i$ . Тому, якщо вибрати центри січних ексцентричних сфер у точках  $O^i$  перетину вказаних перпендикулярів із віссю другої заданої поверхні обертання (у нашому випадку вісь  $i^2$  конічної поверхні), то сфери відповідних радіусів будуть перетинати задані поверхні обертання по колах. Точки перетину кіл обох заданих поверхонь обертання, що належать одній і тій же сфері, будуть точками шуканої лінії перетину заданих поверхонь обертання.

Побудову проєкцій лінії взаємного перетину двох поверхонь обертання методом ексцентричних сфер виконують у наступній послідовності. Фронтальну проєкцію найвищої точки  $A$  знаходять на фронтальній проєкції перетину контуру поверхні тора контуром конічної поверхні. Прямим проєкціюванням знаходять  $A_1$ . Горизонтальні проєкції найнижчих точок  $B$  і  $B^1$  знаходять на горизонтальній проєкції перетину контуру поверхні тора з контуром основи конічної поверхні. Фронтальні проєкції вказаних точок отримують прямим проєкціюванням  $B$  і  $B^1$  на фронтальну проєкцію основи конічної поверхні.

Для побудови проєкцій проміжних точок лінії взаємного перетину тора і конуса через  $i^1_2$  проводять проєкції слідів січних площин  $f_\alpha, f_\beta, f_\gamma, f_\tau$  і знаходять фронтальні проєкції центрів кіл  $C^1_2, C^2_2, C^3_2, C^4_2$ , по яких відповідні сфери перетинають поверхню тора. Через отримані точки проводять перпендикуляри до фронтальних слідів січних площин  $\alpha, \beta, \gamma, \tau$  і, знайшовши точки перетину вказаних перпендикулярів з  $i^2_2$ , приймають їх за проєкції центрів січних сфер  $O^1_2, O^2_2, O^3_2, O^4_2$ . Сфера, фронтальна проєкція центра якої розміщена в точці  $O^1_2$ , радіусом  $R_2$ , перетинає поверхню тора по колу, фронтальна проєкція якого вироджена у відрізок  $M_2M^1_2$ , а поверхню конуса – по колу, фронтальна проєкція якого вироджена у відрізок  $N_2N^1_2$ . Точки перетину вказаних проєкцій відрізків і є фронтальними проєкціями шуканих точок  $I$  і  $I^1$ , що належать лінії взаємного перетину заданих поверхонь обертання.

Аналогічно знаходять фронтальні проєкції необхідної кількості проміжних точок, сполучають отримані проєкції точок лекальною кривою й отримують фронтальну проєкцію лінії взаємного перетину конуса і торової поверхні.

Горизонтальну проєкцію лінії взаємного перетину заданих поверхонь будують аналогічно розглянутим вище випадкам.

## Розділ 8

### Побудова проекцій гвинтових ліній та поверхонь

#### 8.1. Загальні відомості й визначення

Як сказано вище (пункт 6.1), гвинтові поверхні відносять до нелінійчатих (циклічних) поверхонь. У свою чергу, гвинтові поверхні ділять на поверхні з прямолінійною і криволінійною твірною. До поверхонь з прямолінійною твірною відносять циліндричні й конічні гвинтові поверхні. Для утворення гвинтових поверхонь використовують гвинтові лінії. Гвинтові лінії відносять до класу кривих Бертрана, у яких кривизна  $1:r^1$  і кручення  $1:r^2$  пов'язані лінійним співвідношенням  $a:r^1+b:r^2+c=0$ . Гвинтові лінії визначають як просторові криві, у яких відношення радіуса кривизни до радіуса кручення величина постійна, тобто  $r^1:r^2=const$ .

Гвинтові лінії утворюють у результаті складного руху точки, що складається із обертового руху  $V$  навколо осі обертання, і поступального руху, який, у свою чергу, складається із двох рухів: поступального переміщення  $T$  уздовж осі обертання і поступального переміщення  $N$  в напрямку, перпендикулярному до цієї осі. Характер гвинтової лінії залежить від кута її нахилу до твірних поверхні, на якій вона утворена. Якщо цей кут дорівнює  $90^\circ$ , то гвинтова лінія перетворюється у коло, а коли він дорівнює нулю, то гвинтова лінія перетворюється у пряму лінію. Частина гвинтової лінії, розміщену між двома послідовними точками її зустрічі з будь якою твірною, називають витком гвинтової лінії, а довжину відповідного відрізка твірної – кроком гвинтової лінії. Крок гвинтової лінії  $h$  визначають за формулою  $h=\pi d \operatorname{tg} \Psi^\circ$ , де  $\Psi^\circ$  – кут підйому гвинтової лінії. Якщо  $\Psi^\circ$  постійний на всій довжині гвинтової лінії, її називають гвинтовою лінією з постійним кроком, якщо  $\Psi^\circ$  змінюється – гвинтову лінію називають зі змінним кроком. У нашому випадку розглядають гвинтові лінії й поверхні з постійним кроком.

#### 8.2. Циліндрична гвинтова лінія

Циліндрична гвинтова лінія – це просторова крива, нанесена на поверхні циліндра обертання. Її можна трактувати як траєкторію точки, рух якої складається з двох рухів: поступального по твірній і обертового цієї твірної навколо осі циліндра.

Побудова проекцій точок, що належать гвинтовій лінії, ґрунтується на відомій побудові синусоїди. Для цього будують проекції прямого кругового циліндра діаметром основи  $d$  і висотою  $h$ , основа якого паралельна до  $\Pi_1$  (рис. 8.1).

У такому випадку горизонтальна проекція гвинтової лінії накладається на горизонтальну проекцію циліндра. Фронтальну проекцію гвинтової лінії будують, виходячи із таких міркувань. Точка, яка рухається вздовж гвинтової лінії з положення  $1_2$  у положення  $2_2$ , одночасно обертається на-

вколо осі симетрії з положення  $1_1$  у положення  $2_1$ . Отже, для побудови фронтальної проекції гвинтової лінії на фронтальній проекції циліндра відкладають крок гвинтової лінії  $h$ , ділять його і горизонтальну проекцію гвинтової лінії на однакове число рівних частин (наприклад 12). У пересіченні відповідних горизонтальних і вертикальних прямих, які проведені через однойменні точки поділу, отримують фронтальні проекції точок гвинтової лінії і сполучають їх плавною кривою лінією.

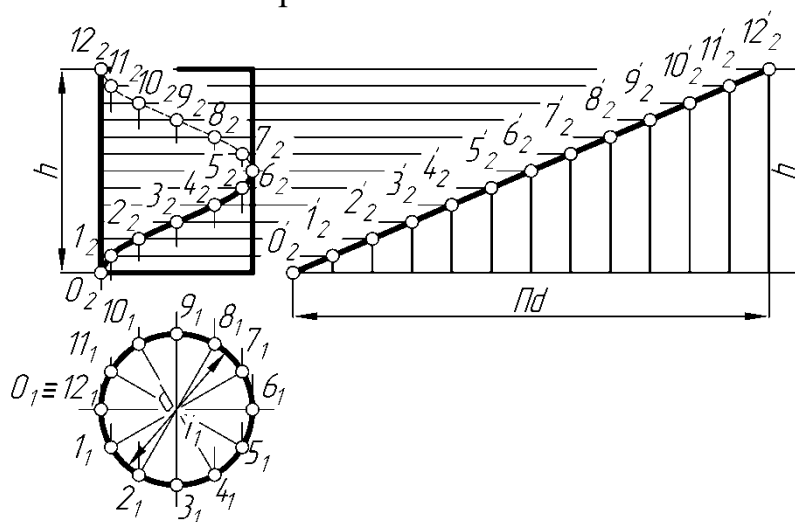


Рис. 8.1

Якщо видима частина гвинтової лінії піднімається праворуч угору, то гвинтову лінію називають правою, а якщо навпаки – лівою. На рисунку наведено циліндричну гвинтову лінію з правим ходом і вертикально розміщеною віссю. Вона характеризується підйомом видимої частини витка праворуч, а невидимої – ліворуч.

Розгортку циліндричної гвинтової лінії починають з побудови на вільному місці креслення горизонтальної лінії довжиною  $\pi d$  і вертикальної висотою  $h$ , які перетинаються. Оскільки горизонтальна проекція і її крок поділені на однакове число рівних частин, побудовані лінії ділять на таке ж число рівних частин (у нашому випадку 12). Розгортка циліндричної гвинтової лінії у межах її кроку є геометричним місцем точок, для кожної з яких ордината пропорційна абсцисі, тобто  $y=kx$ , що є рівнянням прямої лінії.

Через отримані точки поділу проводять вертикальні й горизонтальні лінії. В пересіченні відповідних ліній, які проведені через однойменні точки поділу, отримують точки, які лежать на розгортці. Сама ж лінія розгортки є гіпотенузою прямокутного трикутника з катетами  $\pi d$  і  $h$ , і кутом нахилу  $\alpha$ , який визначають за формулою  $\text{tg } \alpha = h/\pi d$ .

Циліндрична гвинтова лінія володіє властивістю зсуву. Тобто будь який відрізок такої кривої лінії можна зсунути вздовж самої кривої.

### 8.3. Конічна гвинтова лінія

Конічна гвинтова лінія – це просторова крива, нанесена на поверхні конуса обертання. Вона являє собою траєкторію точки, яка рівномірно ру-

хається по твірній, яка, в свою чергу, рівномірно обертається навколо осі конуса. Побудову конічної гвинтової лінії виконують аналогічно побудові циліндричної гвинтової лінії.

Для цього будують проекції прямого кругового конуса діаметром основи  $d$  і висотою  $h$ , основа якого паралельна до  $\Pi_1$  (рис. 8.2).

В такому випадку горизонтальна проекція конічної гвинтової лінії являє собою спіраль Архімеда, фронтальна – синусоїду з амплітудою, що зменшується від основи до вершини.

Для зображення двох витків гвинтової лінії висоту конуса ділять на дві дорівнюють частини (кроки). Горизонтальну проекцію конуса і кожен з кроків гвинтової лінії ділять на однакове число рівних частин (у нашому випадку 12). Через точки поділу кола основи проводять горизонтальні проекції відмічених твірних, а через точки поділу осі проводять сліди горизонтальних площин ( $f_\alpha, f_\beta, \dots$ ), які перерізають конус по колах. Горизонтальні проекції цих кіл з відповідними горизонтальними проекціями твірних конуса визначають горизонтальні проекції точок, які належать шуканій гвинтовій лінії. Фронтальні проекції цих точок лежать на фронтальних проекціях відповідних кіл. З'єднавши побудовані проекції точок плавними кривими лініями отримують горизонтальну і фронтальну проекції конічної гвинтової лінії.

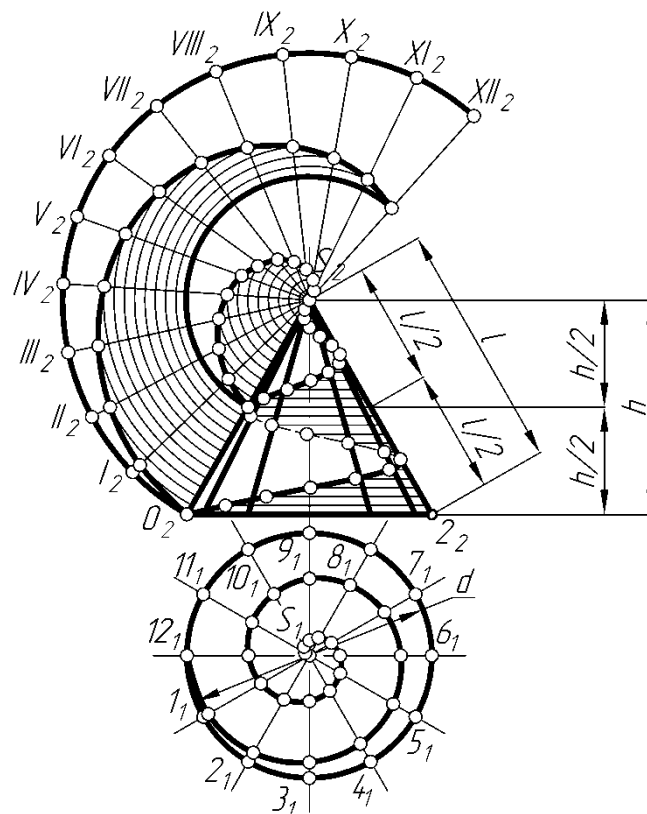


Рис. 8.2

Під час побудови розгортки конічної гвинтової лінії враховують, що розгортка бокової поверхні конуса має форму сектора, радіус якого дорівнює твірній  $l$  конуса, довжина дуги його дорівнює довжині кола основи, а кут  $\phi$  сектора визначають за формулою

$$\phi = 2\pi R/l = 360 R/l.$$

Побудову розгортки конічної гвинтової лінії починають з викреслювання на вільному місці креслярського паперу розгортки бокової поверхні конуса. Кут  $\phi$  і твірну  $l$  побудованого сектора ділять на таке ж число рівних частин, як горизонтальну проекцію основи і висоту конуса. Через отримані точки поділу кута сектора  $\phi$  і вершину розгортки  $S_0$  проводять промені до перетину з основою розгортки, через точки поділу твірної  $l$  проводять концентричні дуги з центром у вершині розгортки  $S_0$ . В пересіченні відповідних променів і дуг, які проведені через однойменні точки поділу, отримують точки, які лежать на розгортці. З'єднують побудовані точки плавними кривими лініями й отримують розгортку двох витків конічної гвинтової лінії.

#### 8.4. Прямий гелікоїд

Як зазначалось вище, гвинтові поверхні утворюють довільні твірні, які рухаються по напрямних гвинтових лініях. Якщо твірна гвинтової поверхні є прямою лінією, то таку поверхню називають лінійною гвинтовою поверхнею або гелікоїдом. Якщо твірна гелікоїда перетинає вісь поверхні, гелікоїд називають закритим, якщо не перетинає – відкритим. Якщо твірна гелікоїда перпендикулярна до його осі, то такий гелікоїд називають прямим.

Побудову проєкцій прямого гелікоїда починають з викреслювання проєкцій напрямної гвинтової лінії (рис. 8.3). Оскільки твірна лінія прямого гелікоїда завжди перпендикулярна до осі поверхні  $i$  ( $i_1, i_2$ ), а остання перпендикулярна до  $\Pi_1$ , то вказана твірна в усіх її положеннях паралельна до  $\Pi_1$ . Тому для побудови проєкцій довільної точки  $K$  ( $K_1, K_2$ ), яка належить поверхні прямого гелікоїда, достатньо побудувати проєкції відповідної

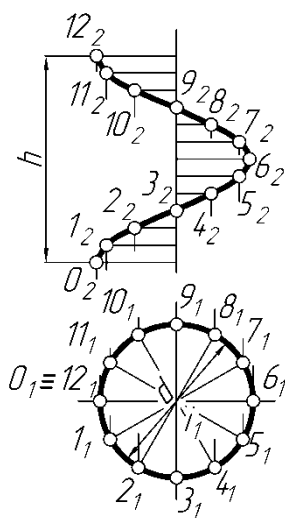


Рис. 8.3

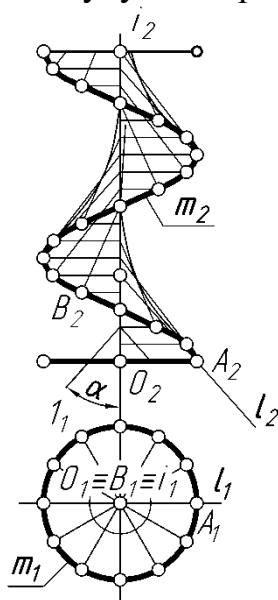


Рис. 8.4

твірної, яка проходить через цю точку.

Поверхню прямих гелікоїдів використовують для утворення прямокутної різі в транспортуючих шнекових механізмах, гвинтових сходах, гвинтових муфтах зчеплення, виїздах у багатоповерхові гаражі (пандуси).

## 8.5. Косий гелікоїд

Косий гелікоїд (рис. 8.4) відрізняється від прямого тим, що його твірна  $l$  ( $l_1, l_2$ ) перетинає вісь  $i$  ( $i_1, i_2$ ) під постійним кутом  $\varphi$ , який не дорівнює  $90^\circ$ . Тобто твірна  $l$  під час руху ковзає по двох напрямних, одна з яких являється циліндричною гвинтовою лінією  $m$  ( $m_1, m_2$ ), а друга – її віссю  $i$ . При цьому у всіх своїх положеннях твірна  $l$  паралельна до твірних направляючого конуса, кут між твірними якого і віссю, паралельною до осі гелікоїда дорівнює  $\varphi$ .

Оскільки твірна  $l$  гелікоїда перетинає напрямну  $m$  у точці  $A$  ( $A_1, A_2$ ), ( $l \cap m = A$ ), а вісь  $i$  в точці  $B$  ( $B_1, B_2$ ), ( $l \cap i = B$ ), то її горизонтальні проекції в усіх положеннях мають виходити із виродженої проекції осі  $i_1$ . Фронтальні проекції твірної  $l$  будують з допомогою напрямного конуса. Отже, горизонтальним обрисом поверхні є горизонтальна проекція гвинтової лінії, фронтальним обрисом поверхні є фронтальна проекція гвинтової лінії і криві, які огинають ряд положень твірної лінії.

Під час побудови проекцій косого гелікоїда будують проекції гвинтової лінії, ділять її горизонтальну проекцію і крок  $h$  на однакове число рівних частин (у нашому випадку 12), на фронтальній проекції гвинтової лінії будують напрямний конус, кут нахилу твірних якого до осі гвинтової лінії задає нахил твірної гелікоїда  $\alpha$  і проекціюють його на горизонтальну проекцію. Через відповідні точки на осі гвинтової лінії проводять фронтальні проекції твірної гелікоїда паралельно до відповідних твірних напрямного конуса до перетину з гвинтовою лінією і будують обвідну лінію усіх положень твірної гелікоїда.

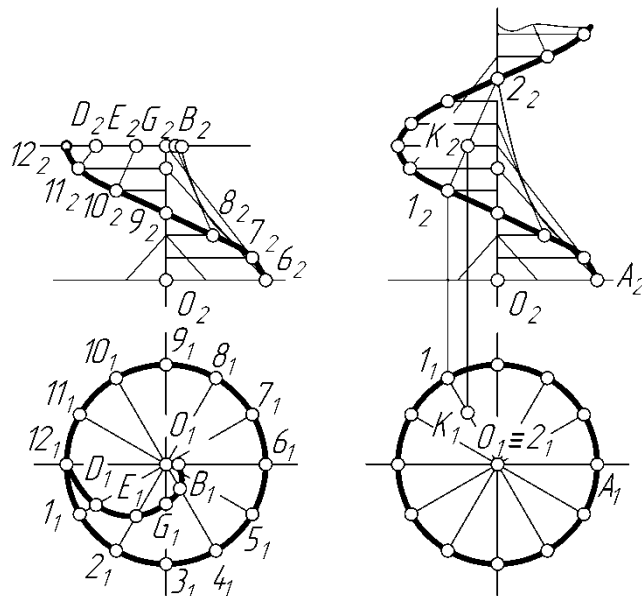


Рис. 8.5

Рис. 8.6

Перерізи поверхні косого гелікоїда площинами, перпендикулярними до його осі, дають спіралі Архімеда (рис. 8.5).

Побудову проекцій точок, які лежать на поверхні косого гелікоїда виконують залежно від того, яка проекція точки відома. Якщо задана гори-

зонтальна проекція точки  $K$  ( $K_I$ ) (рис. 8.6), через  $K_I$  проводять горизонтальну проекцію твірної поверхні  $O_I I_I$  і прямого конуса  $O_I 2_I$ , прямим проєкціюванням знаходять точку  $I_2$ , через яку проводять фронтальну проекцію твірної паралельно твірній прямого конуса, яка проходить через точку  $2$  ( $2_I, 2_2$ ) і прямим проєкціюванням на неї  $K_I$  визначають  $K_2$ .



## Перелік посилань

1. Інженерна та комп'ютерна графіка: підручник для студ. вищ. закладів освіти [текст] / Михайленко В. Є. та ін. – К. : Каравела, 2003. – 344 с. – (Серія «Вища освіта в Україні»).
2. Михайленко, В. Є. Нарисна геометрія: підручник [текст] / В. Є. Михайленко. – К. :Вища шк., 1993. – 271 с.
3. Кириченко, А. Ф. Теоретичні основи інженерної графіки: підручник [текст] / А. Ф. Кириченко. – Х.: Торнадо, 2002. — 496 с.
4. Гордон, В. О. Курс начертательной геометрии: учеб. Пособие [текст] / В. О. Гордон. – 26-е изд., стер. – М. : Высш. шк., 2004. – 272 с.
5. Посвянский, А. Д. Краткий курс начертательной геометрии: учеб. для студентов втузов.– 2-е изд., перераб. [текст] / А. Д. Посвянский – М.:Высшая школа,1965 – 240с.
6. Лагерь, А. И. Инженерная графика [текст] / А. И. Лагерь. – Красноярск: Изд. ун-та, 1987. – 215 с.
7. Хмеленко, О. С. Нарисна геометрія. Теорія та приклади рішення задач: підруч. / О. С. Хмеленко. – К. : Кондор, 2008. – 440 с.
8. Нарисна геометрія, інженерна та ком'ютерна графіка: навчально-методичний посібник для студентів немеханічних спеціальностей всіх форм навчання [текст] / П.П. Волошкевич, О.О. Бойко, Б.В. Панкевич, Є.В. Мартин, А.Л. Беспалов – Львів, вид-во НУ „Львівська політехніка”, 2007. – 240 с.
9. Шевченко, О.С. Нарисна геометрія: методичні вказівки до виконання графічних робіт та задач. Частина I [текст] / О.С. Шевченко, С.Т. Шевченко – Тернопіль: Збруч, 1979. – 152 с.
10. Шевченко, О.С. Нарисна геометрія. методичні вказівки до виконання графічних робіт та задач. Частина II [текст] / О.С. Шевченко, С.Т. Шевченко – Тернопіль: Збруч, 1979. – 266 с.
11. Даниленко, В. Я. Основні поняття і задачі нарисної геометрії: тексти лекцій [текст] / В. Я.Даниленко – Х. – 1992. – 90 с.
12. Ковбашин, В.І. Нарисна геометрія: конспект лекцій частина перша [текст] / В.І.Ковбашин, М.Й. Маркович, Ю.С. Рассказов. – Тернопіль, ТДТУ – 2005. – 95 с.
13. Ковбашин, В.І. Нарисна геометрія: конспект лекцій частина друга [текст] / В.І. Ковбашин, А.І. Пік, Ю.С. Рассказов. – Тернопіль: ТДТУ, 2009. – 83 с.
14. Ковбашин, В.І. Основні позиційні задачі: методичні вказівки та завдання до виконання графічних робіт з курсу нарисної геометрії [текст] / В.І. Ковбашин, А.І. Пік, Ю.С. Рассказов. – Тернопіль: ТДТУ, 2007. – 39с.
15. Метричні задачі: методичні вказівки та завдання до виконання графічних робіт з курсу «Нарисної геометрії» [текст] / С.М. Данильченко, В.І. Ковбашин, А.І. Пік, Ю.С. Рассказов. – Тернопіль: ТДТУ, 2007. – 27 с.

16. Перетин гранних поверхонь площинами загального положення: методичні вказівки та завдання до виконання графічних робіт з курсу «Інженерна графіка» [текст] / А.І. Пік, М.П. Милик, С.М. Балабан, В.І. Ковбашин, Ю.С. Рассказов, С.М. Данильченко, М.Й. Маркович. – Тернопіль: ТНТУ, 2010. – 18с.

17. Перетин тіл обертання площиною: методичні вказівки та завдання до виконання графічних робіт з курсу «Інженерна графіка» [текст] / М.П. Милик, А.І. Пік, С.М. Балабан, В.І. Ковбашин, Ю.С. Рассказов. – Тернопіль: ТДТУ, 1997. – 18с.

18. Побудова ліній перетину поверхонь: методичні вказівки та завдання до виконання графічних робіт студентами денної форми навчання [текст] / С.М. Балабан, М.Й. Маркович, С.М. Данильченко, В.М. Чиж. – Тернопіль: ТДТУ, 2007. – 28 с.

19. Ковбашин, В.І. Основи геометричного креслення: методичний посібник та завдання для самостійної роботи й виконання графічних робіт з курсу «Інженерна графіка» [текст] / В.І. Ковбашин, А.І. Пік, Ю.С. Рассказов – Тернопіль: ТДТУ, 2008, – 80 с.

## Зміст

<b>ВСТУП.....</b>	<b>3</b>
1. Предмет “Інженерна графіка”, ціль і задачі курсу .....	3
2. Позначення на кресленнях геометричних фігур, символів позиційності й логічних операцій.....	3
<b>Розділ 1.....</b>	<b>5</b>
<b>Способи графічних відображень, проекціювання точки .....</b>	<b>5</b>
1.1. Спосіб центрального проекціювання .....	5
1.2. Спосіб паралельного (циліндричного) проекціювання .....	6
1.3. Спосіб прямокутного (ортогонального) проекціювання .....	8
1.4. Спосіб ортогонального проекціювання на дві взаємно перпендикулярні площини проекцій.....	8
1.5. Епюр Монжа. Проекції точок у різних чвертях простору .....	10
1.6. Ортогональне проекціювання на три взаємно перпендикулярні площини проекцій .....	13
1.7. Взаємне положення двох точок. Конкуруючі точки .....	16
1.8. Перехід від осного епюра до безосного і від безосного до осного.....	18
1.9. Побудова проекцій точок за абсолютними координатами.....	20
1.10. Побудова проекцій точок за відносними координатами .....	21
<b>Розділ 2.....</b>	<b>23</b>
<b>Проекціювання прямої лінії.....</b>	<b>23</b>
2.1. Проекціювання лінії загального положення .....	23
2.2. Побудова проекцій слідів прямої на площинах проекцій .....	25
2.3. Проекціювання прямих, які займають особливе положення відносно площин проекцій.....	27
2.4. Взаємне розміщення точки і прямої .....	30
2.5. Поділ відрізка прямої у заданому відношенні.....	32
2.6. Побудова на кресленні натуральної величини відрізка прямої і кутів нахилу прямої до площин проекцій .....	34
2.7. Взаємне розташування прямих у просторі.....	36
<b>Розділ 3.....</b>	<b>38</b>
<b>Проекціювання площин.....</b>	<b>38</b>
3.1. Способи зображення площин на кресленні .....	38
3.2. Проекціювання площини загального положення .....	38
3.3. Побудова слідів площини на площинах проекцій.....	39
3.4. Проекціювання площин, які займають особливе положення відносно площин проекцій.....	41
3.5. Проекціювання прямих і точок, які належать площині.....	44
3.6. Побудова проекцій плоских фігур .....	45
3.7. Проекціювання головних ліній площини.....	47
3.8. Перетин довільних прямих та площин площинами окремого положення .....	53
3.9. Перетин прямої з площиною загального положення та визначення видимості прямої на епюрі.....	55
3.10. Побудова проекцій лінії взаємного перерізу площин.....	57
3.11. Визначення кута між двома площинами, які перерізаються.....	62
<b>Розділ 4.....</b>	<b>63</b>
<b>Перпендикулярність прямих і площин. Метричні задачі .....</b>	<b>64</b>
4.1. Проекціювання плоских кутів. Проекціювання прямого кута.....	64
4.2. Побудова проекцій перпендикуляра до площини .....	65
4.3. Визначення дійсної величини відстані від точки до площини .....	66

4.4. Побудова проєкцій площин, перпендикулярних між собою .....	67
4.5. Побудова проєкцій прямих перпендикулярних між собою .....	69
4.6. Побудова проєкцій прямої паралельної до площини.....	70
4.7. Побудова проєкцій площин, паралельних між собою .....	71
<b>Розділ 5.....</b>	<b>73</b>
<b>Методи перетворення ортогональних проєкцій .....</b>	<b>73</b>
5.1. Різновидності й особливості методів перетворення ортогональних проєкцій.....	73
5.2. Метод заміни площин проєкцій .....	73
5.3. Метод плоскопаралельного переміщення .....	77
5.4. Метод обертання навколо осі перпендикулярної до площини проєкцій (проєкціюючої прямої) .....	79
5.5. Метод обертання навколо прямої рівня .....	83
5.6. Визначення натуральних величин кутів між геометричними фігурами .....	87
<b>Розділ 6.....</b>	<b>93</b>
<b>Проекціювання поверхонь .....</b>	<b>93</b>
6.1. Визначення, утворення, класифікація поверхонь.....	93
6.2. Побудова проєкцій точок і ліній, які належать поверхням геометричних тіл .....	96
6.3. Переріз поверхонь проєкціюючими площинами .....	100
6.4. Побудова проєкцій точок перетину прямих ліній з поверхнями.....	105
6.5. Переріз піраміди площиною загального положення.....	108
6.6. Переріз призми площиною загального положення.....	113
6.7. Переріз конуса площиною загального положення.....	119
6.8. Переріз циліндра площиною загального положення .....	122
<b>Розділ 7.....</b>	<b>126</b>
<b>Побудова проєкцій ліній взаємного перетину поверхонь .....</b>	<b>126</b>
7.1. Загальні відомості й основні принципи побудови ліній взаємного перетину поверхонь .....	126
7.2. Побудова проєкцій лінії взаємного перетину двох поверхонь, одна з яких проєкціююча .....	128
7.3. Побудова проєкцій лінії взаємного перетину двох нахилених поверхонь .....	131
7.4. Побудова проєкцій ліній взаємного перетину поверхонь методом паралельних січних площин .....	138
7.5. Побудова проєкцій ліній взаємного перетину поверхонь методом концентричних сфер.....	141
7.6. Побудова проєкцій ліній взаємного перетину поверхонь методом ексцентричних сфер.....	145
<b>Розділ 8.....</b>	<b>147</b>
<b>Побудова проєкцій гвинтових ліній та поверхонь .....</b>	<b>147</b>
8.1. Загальні відомості й визначення .....	147
8.2. Циліндрична гвинтова лінія .....	147
8.3. Конічна гвинтова лінія .....	148
8.4. Прямий гелікоїд .....	150
8.5. Косий гелікоїд.....	151
<b>Перелік посилань .....</b>	<b>153</b>
<b>Зміст .....</b>	<b>155</b>